数学II

11 直線と円

入試対策　座標を用いて点，直線，円の性質を調べるのが本節の内容であるが，入試問題としてはいずれも基本的ないし標準的レベルのものばかりである。しかし，逆に考えればそれだけに誰でも完答しなければいけない。実際に紙の上に図形をかいてスタートする。これは図形問題の鉄則だ。中学校以来の図形の性質を基礎としてフルに活用し，あとは着実な計算を行っていくだけである。

1st step

☞解答は「考え方と解答」72 ページ

291 (1)　4 点 A$(-1,\ 3)$，B$(4+\sqrt{2},\ \sqrt{3})$，C$(6,\ 3)$，D$(1+\sqrt{2},\ 4+\sqrt{3})$ を頂点とする四角形の辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。四角形 PQRS の周の長さと面積を求めよ。　（東京理大－工）

(2)　3 点を A$(-1,\ 2)$，B$(1,\ -2)$，C$(x,\ y)$ とする。ただし，$x>0$ である。いま，線分 AB と線分 AC が直交するとき，x と y の間には関係式 $\boxed{}$ が成り立つ。さらに，線分 BC の長さが 5 ならば，C の座標は $\boxed{}$ である。　（福岡大－人文）

292 点 O を原点とする xy 平面の第 1 象限に 1 辺の長さが 1 の正方形 OABC がある。ここで点 A，C はそれぞれ x 軸上，y 軸上にある。点 P が時刻 $t=0$ に A を出発し，直線 $x=1$ 上を y 座標が増加する方向へ，一定の速さ $v>0$ で移動するものとする。

(1)　直線 OP の正方形 OABC に含まれている部分の長さ l を時刻 t の関数として表せ。

(2)　△OAP と正方形 OABC の共通部分の面積 S を時刻 t の関数として表せ。

（佐賀大－理工・農）

293 $2x^2-7xy+3y^2+kx+y-2=0$（k は正の定数）が 2 直線を表すならば，$k=\boxed{}$ で，2 直線の方程式は $\boxed{}$ と $\boxed{}$ である。　（昭和薬大）

294　次の方程式で表される相異なる直線 l_1，l_2，l_3 がある。

$$l_1 : x+y+(3-k)=0,\ l_2 : x-(2+k)y-1=0,\ l_3 : (2-k)x-y+2=0$$

(1)　2直線 l_1，l_2 が交わらないとき，$k=\boxed{}$ である。

(2)　3直線 l_1，l_2，l_3 が1点で交わるとき，$k=\boxed{}$，$\boxed{}$，$\boxed{}$ である。　（慶大－経済）

295　点 A(0, 3)，B(4, 0) と原点 O(0, 0) でつくられる△ABO がある。辺 AO 上に点 M，辺 AB 上に点 N をとり，線分 MN でこの三角形の面積を2等分する。点 M の座標を $(0,\ \alpha)$，N の x 座標を β とすると，

(1)　α と β は次の式を満足する。$\beta(\boxed{}-\alpha)=\boxed{}$

(2)　線分 MN$=l$ とすれば $l^2=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\beta^2+\dfrac{\boxed{}}{\beta^2}-9$ であり，l の最小値は $\sqrt{\boxed{}}$ となる。

（共立薬大）

296　原点を O とする座標平面上に点 A(4, 0) がある。点 P は直線 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ の上を動く。

(1)　OP^2+PA^2 を最小にする点 P の座標を求めよ。

(2)　OP＋PA を最小にする点 P の座標を求めよ。　（関西大－経済）

297　直線 l を $y=mx+k$ $(mk \neq 0)$，点 A を $(0,\ k)$ とする。l を原点のまわりに A を通るまで回転させる。ただし，回転角は 360° の整数倍でないものとする。

(1)　この回転により l 上の点 P が A に移動したとする。P の回転前の座標を m と k を用いて表せ。

(2)　A の位置にある l 上の点を Q とする。Q の回転後の座標を m と k を用いて表せ。

（香川大－経済）

298　円 $x^2+y^2-4x-8y+11=0$ に点 $A(a,\ 0)$ $(a>0)$ からひいた2本の接線の接点を P，Q とするとき，$a=\boxed{}$ ならば，△APQ は正三角形となる。　（近畿大－工）

299　円 $x^2+y^2+2ax-ay-5+5a=0$ は実数 a がどんな値をとっても定点 $\boxed{}$ を通る。また，この円が円 $x^2+y^2=1$ に接するときの a の値は2つあって，$\boxed{}$ であり，この求めた2つの a に対する円の中心間の距離は $\boxed{}$ となる。ここに，2つの円が接するとは，共有点において同一の接線をもつときをいう。　（東京理大－薬）

300 2つの円を $x^2+y^2-2ax-2ay+8a-16=0$ …(A)，$x^2+y^2=4$ …(B) とする。

(1) 円(A)は定数 a の値に関係なくつねに2つの定点を通ることを示し，その定点を求めよ。

(2) 円(A)と円(B)の共有点の個数を調べよ。（早大－商）

301 2つの円 $x^2+y^2=\frac{1}{16}$，$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ の共通接線の方程式を求めよ。（大阪歯大）

302 a，b を実数とし，平面上に直線 $l：y=x-a$ と円 $C：x^2+(y-b)^2=1$ を考える。

(1) 直線 l と円 C が異なる2つの交点をもつための a，b に関する条件を求めよ。

(2) a，b が(1)で求めた条件をみたし，さらに，$b=-a^2+1$，$a+b\geqq 0$ をみたすとする。直線 l と円 C の交点をP，Qとするとき，線分PQの長さを最小にする a，b の値を求めよ。

（大阪女大）

303 xy 平面上の原点を中心とし，半径1の円を C とする。点A(3, 0)，点P$(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$ を通る直線 l が円 C と2点で交わるとき，P以外の交点をQとする。このとき，$\mathrm{AP}^2=\boxed{}-\boxed{}\cos\theta$ である。また，点Aより円 C にひいた接線の接点をTとすると $\mathrm{AT}=\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$ であるから $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\boxed{}$ である。したがって，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}}=\left|\dfrac{3\cos\theta-\boxed{}}{\boxed{}-\boxed{}\cos\theta}\right|$ となる。（早大－商）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」74ページ

304 ∠Cを直角とする直角三角形ABCにおいて，BCを a，ACを b $(a\leqq b)$ とする。AB上の点P，AC上の点Qを結ぶ直線PQを折り目として，AがBC上の1点Dに一致するように△ABCを折ったとき，△APQの面積 S を a，b とCDの長さ l を用いて表せ。

（同志社大－商）

305 $y=\frac{1}{2}(|x-1|+|x|+1)$ のグラフと $y=2-|x-k|$ のグラフが共通点をもつような実数の定数 k の範囲を求めよ。また，このとき，これらのグラフで囲まれる部分の面積を $S(k)$ として，$S(k)$ の最大値を求めよ。（立命館大－理工）

306 座標平面上に点O(0, 0)と点A(3, 0)をとる。直線 $y=x-1$ 上に動点Pをとり，$k=\dfrac{\mathrm{AP}^2}{\mathrm{OP}^2}$ とおく。

(1) k のとる値の範囲は $\boxed{}\leqq k\leqq\boxed{}$ である。

(2) (1)の k の最大値を与える点Pの x 座標は $\boxed{}$ である。

(3) (1)の範囲にある k の値のうち，その値を与える点Pがただ1つであるのは，その範囲の両端の値と $k=\boxed{}$ である。（近畿大－薬）

307 正方形ABCDの紙がある。この紙をある直線にそって折りまげて，頂点Aが辺BC上の点Pにくるようにする。このとき，折りまげた部分(点Aを含む部分)の面積が最小になるのは，PがBC上のどこにある場合か。A，B，C，D，Pの座標をそれぞれ$(0,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(a,\ 0)$として考えよ。 (津田塾大－国際)

308 Oを原点とする平面上の点A$(3,\ 5)$と点P$(m,\ n)$（m，nは整数を動く）を考える。ただし，3点O，A，Pは同一直線上にないものとする。

(1) OA，OPを2辺とする平行四辺形の面積の最小値を求めよ。

(2) その最小値を与えるPは2直線上にある。この2直線を求めよ。

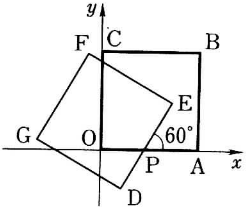
(3) その最小値を与えるPをすべて求めよ。 (名大－理系)

309 座標平面上の3点A$(0,\ \sqrt{3})$，B$(-1,\ 0)$，C$(1,\ 0)$を頂点とする正三角形ABCの辺BC，CA，AB上にそれぞれ点D，E，Fがあり，BD＝CE＝AFをみたしている。

(1) BD$=t$のとき，EとFの座標をtを用いて表せ。

(2) △DEFの面積が最小となるときの点Dの座標を求めよ。 (阪大－法・経済)

310 図のように座標平面上に点A$(2,\ 0)$，B$(2,\ 2)$，C$(0,\ 2)$をとり，これらの点と原点Oとで正方形OABCをつくる。さらに，辺OA上に点P$(t,\ 0)$をとり，正方形OABCをPを中心として，60°回転させる。回転させてできた正方形をDEFGとする。ただし，$0 \leqq t \leqq 1$とする。



(1) Eの座標をtを用いて表せ。

(2) Fの座標をtを用いて表せ。

(3) EとFを通る直線の方程式を求めよ。

(4) 辺EFと辺COが交わるようなtの範囲を求めよ。 (早大－人間科学)

311 xy平面において，$x^2+y^2=1+|a|$で表される円をC，$y=2x+a$で表される直線をlとする。ただし，aは実数とする。

(1) Cとlが異なる2交点をもつようなaの範囲を求めよ。

(2) (1)における2交点間の距離の最大値と，それを与えるaの値を求めよ。

(奈良女大－理・家政)

312 円 $x^2+y^2-2ax+4ay+a^2=0$（aは0でない実数）について

(1) 円の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 0でない実数aがどんな値をとってもこの円に接する直線の方程式を求めよ。

(滋賀大－教育)

313 xy 平面上の2点 A$(2,\ 1)$，B$(9,\ 8)$ を通る円 C が，x 軸と2点 P，Q で交わるとする。このとき，

(1) 円 C の中心は直線 $y=^{ア}\boxed{}x+^{イウ}\boxed{}$ 上にある。

(2) 中心が x 軸上にあるならば，円 C の方程式は $x^2+y^2-^{エオ}\boxed{}x+^{カキ}\boxed{}=0$ である。

(3) $\angle \mathrm{APB}=90^\circ$ ならば，円 C の方程式は $x^2+y^2-^{クケ}\boxed{}x-^{コ}\boxed{}y+^{サシ}\boxed{}=0$ である。

(4) 線分 PQ が $x>0$ の範囲にあって，その長さが $4\sqrt{5}$ ならば，円 C の方程式は
$x^2+y^2-^{スセ}\boxed{}x-^{ソ}\boxed{}y+^{タチ}\boxed{}=0$ である。

314 点 O$'(a,\ 6)$ を中心とする半径5の円と，直線 $x+y=3$ の2つの交点を P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$ とする。実数 a の変動に対して，次の(1)，(2)を求めよ。ただし，O は原点である。

(1) P，Q 間の距離が最大となるとき，これら2点を直径の両端とする円の方程式

(2) x_2 の値が最大となるとき，四角形 OQO$'$P における2つの対角線のなす角の正弦の値

(福井工大)

315 xy 平面において，円の方程式を

$$x^2+y^2+(\sin\theta-2)x+2(\sin\theta-1)y-4\sin\theta+1=0$$

とする。ここで，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ である。

(1) θ がどんな値をとっても，この円はある定点を通る。その定点を求めよ。

(2) この円が x 軸，y 軸の少なくとも1つの軸と共有点をもつように，θ の範囲を定めよ。

(3) この円と直線 $y=x+\sin\theta+1$ との共有点の個数を求めよ。 (防衛医大)

316 放物線 $y=a(1-x^2)$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた範囲内にあり，原点で x 軸に接する円の半径の最大値を求めよ。 (一橋大)

317 xy 平面において，円 $(x-t)^2+(y-1)^2=1$ $(t>0)$ と放物線 $y=x^2$ は，共有点 P$(a,\ b)$ で共通接線をもつものとする。

(1) t を a を用いて表せ。

(2) a，b を求めよ。 (横浜市大－文理・医)

318 放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる3点 P$(a,\ a^2-2)$，Q$(b,\ b^2-2)$，R$(c,\ c^2-2)$ がある。原点を中心とする半径1の円周を S とし，直線 PQ，直線 PR はそれぞれ S に接するとする。

(1) 線分 QR の中点の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 QR もまた S に接することを証明せよ。 (名大－経済)