12　軌跡と領域

入試対策　座標平面上の図形について，与えられた条件をみたす点の軌跡を求めたり，不等式の表す領域を図示したりすることは，数学 I，A のまとめの意味でよく出題される。典型的な問題について，その扱い方をよく学習する必要がある。また，教科書の範囲は超えるが，応用として放物線の上側，下側を表す領域もよく出される。いずれにしても面倒な問題は多くない。図の問題は図をかいて調べる鉄則を忘れないこと。

1st step

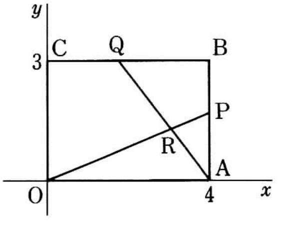
☞解答は「考え方と解答」79 ページ

319　定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と円 $S : x^2+y^2=4$ がある。点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が円 S 上を動くとき，線分 AP の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ の軌跡を C とする。

(1) 軌跡 C の方程式を求めよ。

(2) 軌跡 C が円 S に接するような a の値を求めよ。　　（東海大－法）

320　右の図のような長方形 OABC において，点 P は辺 AB を A から B まで動き，点 Q は辺 BC を B から C まで動く。線分 OP と AQ の交点を R とするとき，△OAR と四角形 PBQR の面積はつねに等しいとする。



(1) 線分 AP，BQ の長さをそれぞれ a，b として，a と b の関係式を求めよ。

(2) 交点 R の座標 $(x,\ y)$ を a で表せ。

(3) a を消去して座標 x，y の関係式を求めよ。　　（早大－人間科学）

321　xy 平面上の 2 点を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。線分 AB を直径とする円周上(点 A，B を除く)を動く点 P がある。線分 PA を $3:4$ に内分する点を N とし，線分 PB を $1:4$ に内分する点を M とする。AM と BN の交点 Q がえがく図形の方程式を求めよ。　　（上智大－理工）

322　座標平面上に△ABC があり，その 3 つの頂点は $\mathrm{A}(-\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 0)$ $\mathrm{C}(\alpha,\ \beta)$ で，$\angle\mathrm{BCA}=60^\circ$ である。ただし，$\beta>0$ とする。頂点 C がこの条件をみたしながら動くとき，β の最大値は $\boxed{}$ であり，辺 BC の長さと辺 CA の長さの積 $\overline{\mathrm{BC}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}$ の最大値は $\boxed{}$ である。　　（西南学院大）

323 平面上の点Pから2つの円 $(x-2)^2+y^2=1$, $(x+4)^2+y^2=4$ へそれぞれ接線をひき，その接点をA，Bとする。PA：PB＝1：2であるとき，点Pの軌跡を求めよ。（日本女大－家政）

324 3点O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ を頂点とする△OABの辺OA上に点Pをとり，辺OB上にOQ：QB＝AP：POをみたす点Qをとる。

(1) Pを辺OA上の両端以外のどこにとっても，△OPQの外接円はO以外の定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。

(2) 2線分AQ，BPの交点をRとする。Pが辺OA上を動くときのRの軌跡と直線 $y=x$ との交点の座標を求めよ。（同志社大－法）

325 (1) 放物線 $y=x^2-ax+a$ の頂点が，不等式 $0\leqq y\leqq 1-x^2$ で表される領域に含まれるとき，定数 a のみたす範囲は $\boxed{}$ である。（日本獣畜大）

(2) 2つの放物線 $y=2x-x^2$，$y=x^2-2a^2x+b$ が互いに接するように a，b を動かすとき，放物線 $y=x^2-2a^2x+b$ の頂点 $(X,\ Y)$ がえがく図形の方程式は $\boxed{}$ となる。（北海道工大）

326 (1) 点 $(x,\ y)$ が領域 $x-1\leqq y\leqq 1-x^2$ を動くとき，$\dfrac{x}{2}-y$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（大同工大）

(2) 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $4\leqq |x|+|y|\leqq 5$ で表される領域を動くとき，$x^2+y^2-4x-2y$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（中央大－理工）

327 (1) 実数 x，y は $x^2+6xy+4y^2=3$ をみたしている。このとき，$2xy+x+2y+1$ のとりうる値の範囲を求めよ。（東邦大－理）

(2) x，y が $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x^3+y^3=1$ をみたしながら変わるとき，$x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ。（阪大－法・人間科学）

328 座標平面上の集合

$A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqq 13\}$，$B=\{(x,\ y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2\leqq 2\}$，

$C=\{(x,\ y)\,|\,x-|y|\leqq \alpha\}$ （α は実数）がある。

(1) $A\cap B$ を図示せよ。

(2) $A\cap B\cap C=\phi$ であるような α の範囲を求めよ。（関西大－経済）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」81 ページ

329 座標平面上の原点を中心とする半径 a の円と，y 軸上に頂点をもつ放物線 $y=x^2+b$ とに共通点があるような $(a,\ b)$ の範囲を求め，図示せよ。 (立教大－理)

330 xy 平面上で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。
(1) 円 C と x 軸の両方に接する円の中心の軌跡を求めよ。
(2) 半径 r の円で，円 C と x 軸の両方に接するものの個数を求めよ。 (津田塾大－数学)

331 点 A の座標を $(1,\ 1)$ とし，放物線 $y=x^2$ 上に点 A 以外の任意の 2 点 $\mathrm{B}(\alpha,\ \alpha^2)$ および $\mathrm{C}(\beta,\ \beta^2)$ を，AB と AC が垂直になるようにとると，$\alpha\beta+\alpha+\beta+\boxed{}=0$ となる。次に長方形 ABDC をつくると，点 B が原点 O に一致するとき，点 D の y 座標は $\boxed{}$ となり，点 B を動かしたとき，頂点 D の軌跡は，放物線 $y=x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ から点 $(\boxed{},\ \boxed{})$ を除いたものである。 (東京理大－薬)

332 2 つの曲線 $C_1：y=-x^2$，$C_2：y=x^2+1$ がある。曲線 C_1 の接線が曲線 C_2 と相異なる 2 点 P，Q で交わるとき，線分 PQ の中点がえがく図形の方程式を求め，図示せよ。 (東京電機大)

333 $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，直線 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$ を考える。
(1) この直線は，原点を中心とする半径 1 の円に接することを証明せよ。
(2) θ を動かしたとき，この直線が通る点の集合を図示せよ。 (甲南大－理)

334 xy 平面上で，2 点 $(0,\ t-t^2)$，$(1,\ -(t-1)^2)$ を結ぶ線分を $l(t)$ とおく。
集合 $\{(x,\ y)\,|\,(x,\ y)$ はある $0<t<1$ の定める線分 $l(t)$ 上の点である$\}$
を xy 平面上に図示せよ。 (埼玉大－理)

335 $(x,\ y)$ と $(X,\ Y)$ の間に次の関係があるものとする。

$$x=\frac{kX}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{kY}{X^2+Y^2} \quad (k \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

$(X,\ Y)$ が直線 $12X-5Y+k=0$ 上を動くとき，$(x,\ y)$ はどんな図形をえがくか。 (信州大－理)

336 点 $(t^2,\ 0)$ で x 軸に接し，点 $(-1,\ 1+t^2)$ を通る放物線を考える。t が動くとき，この放物線の通りうる範囲を求め，図示せよ。（お茶の水女大－理）

337 Oを原点とし，放物線 $C：y^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 上に2点PとQを $\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ となるようにとる。

(1) PとQが C 上を動くとき，線分PQの中点Rはどのような曲線上を動くか。

(2) 直角三角形OPQの面積がとりうる範囲を求めよ。（東北大－文系）

338 定点A$(0,\ 1)$ と動点P$(t,\ 0)$ $(-2\leqq t\leqq 2)$ がある。線分APを1辺とする正方形APQR（時計の針の回転方向にA→P→Q→Rとする）をつくる。

(1) 点Qの軌跡の方程式を求めよ。

(2) 2点Q，Rを通る直線の存在領域を不等式で表し，かつ，図示せよ。（福井工大）

339 xy 平面で，曲線 $C：y=x^2$ $(x>0)$ 上の点Pを中心とし，x 軸に接する円を考える。Pが C 上を動くとき，この円の内部が動く範囲を図示せよ。（岐阜大－教育）

340 (1) 直線 $x+y=2$ と円 $x^2+y^2=5$ の交点の座標を求めよ。

(2) 2つの実数 a，b のうち，大きい方を $\max\{a,\ b\}$ で表す。($a=b$ のときは $\max\{a,\ b\}=a$ である。) 次の不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。

$$1\leqq \max\{4x+4y-3,\ x^2+y^2\}\leqq 5$$

（京大－文系）

341 (1) 2つの円 $x^2+y^2-1=0$ …①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ …② の交点を求めよ。

(2) $x^2+y^2-1\geqq 0$ …③，$x^2+y^2-2x-2y\leqq 0$…④ をみたす点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が③，④をみたすとき，$x+2y$ の最大値および最小値を求めよ。

（早大－社会科学）

342 (1) xy 平面上に3点A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 4)$，P$(x,\ y)$（ただし，$x>0$）がある。
$30^\circ\leqq \angle \mathrm{APB}\leqq 60^\circ$ となる点Pの集合を xy 平面上に図示せよ。

(2) a を実数とし，xy 平面上に3点A$(0,\ a)$，B$(0,\ a+3)$，P$(x,\ y)$（ただし，$x>0$）がある。$30^\circ\leqq \angle \mathrm{APB}\leqq 60^\circ$ となる点Pの集合と x 軸との共通部分が，2つの離れた線分の和集合となるのは，a がどのような範囲にあるときか。（早大－商）