❶ 円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ)，(ロ)を満たすとする．

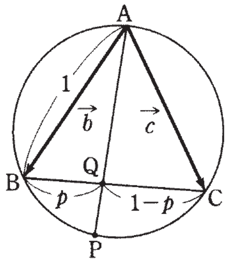
(イ) 三角形 ABC は正三角形である．

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する．

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，p を用いて表せ．（30 点）

❶☆ B** B／ベクトル（平面）

❶ AP と BC の交点を Q として，AP が AQ の何倍かがわかればよいわけです．OP＝円の半径 に着目して内積計算するか，幾何で行くか．



解 △ABC の 1 辺の長さを 1 として一般性を失わない．

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，AP と BC の交点を Q とすると，$\overrightarrow{AQ}=(1-p)\vec{b}+p\vec{c}$

また，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}$ $(t>1)$

とおけ，このとき，円の中心を O とすれば，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AQ}$，$|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2$ より，

$$|\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AQ}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2 \quad \therefore \quad 2t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}+t^2|\overrightarrow{AQ}|^2=0$$

$$\therefore \quad t=-\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AQ}|^2}=\frac{2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AQ}|^2}$$

ここで，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=1/2$ より，

$$|\overrightarrow{AQ}|^2=|(1-p)\vec{b}+p\vec{c}|^2$$

$$=(1-p)^2+p^2+2p(1-p)\cdot\frac{1}{2}=p^2-p+1$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot\{(1-p)\vec{b}+p\vec{c}\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(1-p)+p+1\cdot\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

よって $t=\dfrac{1}{p^2-p+1}$ だから，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{1}{p^2-p+1}\{(1-p)\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{AC}\}}$$

【別解】 △ABQ に余弦定理を用いて，

$$AQ=\sqrt{1+p^2-2\cdot1\cdot p\cos 60^\circ}=\sqrt{p^2-p+1}$$

方べきの定理により，$AQ\cdot QP=BQ\cdot QC$

$$\therefore \quad QP=\frac{BQ\cdot QC}{AQ}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{p^2-p+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{AQ}=1+\frac{QP}{AQ}=1+\frac{p(1-p)}{p^2-p+1}=\frac{1}{p^2-p+1}$$

よって，$\boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{p^2-p+1}\{(1-p)\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{AC}\}}$