❷ 実数 a は $0<a\leqq 2$ の範囲を動くものとする．

（1） $y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ．

（2） 2次方程式 $(2x+a-1)^2=a^2x$ の複素数の範囲で考えた2つの解を α，β（ただし $|\alpha|\leqq|\beta|$）とする．このとき，$|\beta|$ の最小値を求めよ． （35点）

❷☆ C＊＊＊ ⅢB／無理関数，複素数

❷ （2）は単独でも解けそうですが，実数解を持つ場合が厄介．そこで，（1）の利用ということになります．私は最初，（1）で“定数は分離せよ”の定石に従い，$a=(x$の式$)$ の形にすれば実数解の範囲も出てきて一石二鳥だなどと悦に入っていましたが，実は，$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ は定点を通るので，素直にグラフを考えれば解の範囲がわかったのです．日頃“先入観や雑念を捨てて問題に取り組め”と言っているのに．反省．

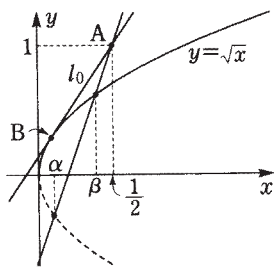
解 （1） $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}(2x-1)+1$ ……①

は定点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通り，$0<a\leqq 2$ より，傾き $\dfrac{2}{a}\geqq 1$

①と $y=\sqrt{x}$ が接する a は，

$\sqrt{x}=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ を平方した

$x=\left(\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}\right)^2$ …②



の重解条件から得られ，②は，

$a^2x=(2x+a-1)^2$ ……③

$\Longleftrightarrow 4x^2-(a^2-4a+4)x+(a-1)^2=0$

$\Longleftrightarrow 4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ ………………④

だから，判別式 $=(a-2)^4-4\cdot 4(a-1)^2$

$=\{(a-2)^2+4(a-1)\}\{(a-2)^2-4(a-1)\}$

$=a^2(a^2-8a+8)$ ………………………………⑤

⑤$=0$ と $0<a\leqq 2$ より，$a=4-2\sqrt{2}$ ………………⑥

このとき①は図の l_0 となり，答えは $\boldsymbol{0<a\leqq 4-2\sqrt{2}}$

（2） 与方程式は③に他ならず，（1）の過程から，

1° α，β が実数のとき，③ $\Longleftrightarrow \pm\sqrt{x}=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$

だから，解は，$y<0$ も含めた図の放物線と直線の共有点の x 座標．$|\beta|$ の最小値は図の接点Bの x 座標で，

⑥のときの④の重解

$=\dfrac{(a-2)^2}{8}=\dfrac{(2-2\sqrt{2})^2}{8}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

2° α，β が虚数のとき，$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$

実数係数だから，2解は共役な複素数で，④より

$|\beta|^2=\beta\bar{\beta}=\beta\alpha=\dfrac{(a-1)^2}{4}$ $\therefore$ $|\beta|=\dfrac{|a-1|}{2}$

これを $f(a)$ とおくと，$4-2\sqrt{2}>1$ より，

$f(a)>f(4-2\sqrt{2})=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

以上から，答えは $\boldsymbol{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}$