第１章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆◆

1　次の式を因数分解せよ.

(1)　$2x^3-(4a+1)x^2+2(a-3)x+12a$　　(神戸学院大)

(2)　$8x^2+13xy-6y^2-66x+20y+16$　　(日本大)

D-1-①

2　(1)　次の式の分母を有理化し，簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

(久留米工大)

(2)　次の値を求めよ.　$\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2$　　(大東文化大)

D-1-②

3　(1)　3で割れば2余り，4で割れば1余る2桁の正の整数は何個あるか.　　(防衛大)

(2)　n を任意の整数とするとき $n(n+1)(n+2)(n+3)$ は24の倍数であることを証明せよ.

(甲南大)

D-1-③

◆◆◆◆◆◆◆　STEP B　◆◆◆◆◆◆◆

4　(1)　x の2次式 x^2+ax+b と x^2+bx+c の最大公約数が $x+1$ で，最小公倍数が $x^3-10x^2+19x+30$ であるとき，a, b, c を求めよ.　　(鹿児島経大)

(2)　x^3+3x^2-4 と $x^3+x^2-4ax-6a$ とが，1次の最大公約数をもつときの a の値を求めよ. また，2次の最大公約数をもつときの a の値を求めよ.　　(川崎医大)

D-1-④

5　(1)　$\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{1}{b}-a$ の値を求めよ.

(東海大)

(2)　$a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $b=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ とするとき，$(a+b)^3=14-3(a+b)$ となることを示し，$a+b$ の値を計算せよ.　　(学習院大)

D-1-⑤

$\boxed{6}$ (1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を満たすように整数 a, b を定めよ．

(2) (1)の結果を用いて $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ が2次方程式 $x^2+sx+t=0$ の解となるように有理数 s, t を定めよ．

(熊本工大)

D-1-⑥

$\boxed{7}$ (1) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=2$ のとき，$\left(\dfrac{2q-p}{p-q}\right)^2$ の値を求めよ． (東京電機大)

(2) $f(x)=x^3-3x^2-3x-1$ のとき，$f(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$ の値を求めよ． (湘南工科大)

D-1-⑦

$\boxed{8}$ A は各位の数字が異なる奇数であるような2桁の正の整数であるとする．A の各位の数字を互いに入れ替えて作った整数を B とする．A と B との平方の差が 2 のなるべく大きい累乗で割り切れるように A を定めよ．

(京都産大)

D-1-⑧

$\boxed{9}$ $x=by+cz$，$y=cz+ax$，$z=ax+by$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $(a+1)x=(b+1)y=(c+1)z$ が成り立つことを示せ．

(2) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$ を簡単にせよ．ただし，$ax+by+cz\neq0$ とする．

D-1-⑨

$\boxed{10}$ a, b, c, d を整数とする．整式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ がいずれも3で割り切れないならば，方程式 $f(x)=0$ は整数の解をもたないことを証明せよ．

(三重大)

D-1-⑩

第2章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆ STEP A ◆◆◆◆◆◆

1　x，y についての連立方程式 $\begin{cases} kx-y=-\sqrt{2}k \\ -2x+ky=2k \end{cases}$ が解をもたないための k の値を求めよ．また，少なくとも２つの解をもつための k の値を求めよ．　（日本医大）

D-1-⑪

2　２つの方程式

$$2x^2+(a^2-2b)x+(b^2+2a)=0,\quad 2x^2+2(a-b)x+(a^2+b^2)=0$$

がただ１つの共通解をもつような実数 a，b の値を求めよ．　（立命館大）

D-1-⑫

3　(1)　$\sqrt{2}$ が $\dfrac{x+5}{x}$ と $\dfrac{x+7}{x+2}$ との間にあるような x の正の整数値を求めよ．　（東京経大）

(2)　$ax^2+bx+a^2>2\ (a\neq 0)$ の解が $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ であるとき a，b の値を求めよ．　（福岡歯大）

D-1-⑬

4　次の不等式を解け．

(1)　$\dfrac{x(x^2+6)}{3x^2+2}>\sqrt{2}$　（東京電機大）

(2)　$|x^2-2x-3|\leqq x+1$　（麻布大）

D-1-⑭

第3章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆

1　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で最小値 -3 をとるという．このとき，a，b，c の満たすべき条件を求めよ．さらに，このグラフが第4象限を通らないとき，a の満たすべき条件を求めよ．

(西日本工大)

D-2-①

2　曲線 $y=(1+2|x|)(2-x)$ において次の問いに答えよ．

(1)　この曲線のグラフをえがけ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの曲線の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分を動くとき，$x+y$ の最大値を求めよ．

(北海道工大)

D-2-②

3　関数 $f(x)=x^2+4xy+y^2+2x+2y+2$ について

(1)　$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2)　(1)で求められた最小値を y の関数と考えて $g(y)$ とおいたときの $g(y)$ の最大値を求めよ．

(東京経大)

D-2-③

◆◆◆◆◆◆　STEP B　◆◆◆◆◆◆

4　(1)　関数 $y=(|x-4|-1)^2$ のグラフをかけ．

(2)　$t \leqq x \leqq t+1$ における(1)の関数の最大値を $f(t)$ とするとき，$f(t)$ を求めよ．

(3)　$t \leqq x \leqq t+1$ における(1)の関数の最小値を $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．　(早稲田大)

D-2-④

5　実数を係数とする2次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ がある．x に関する方程式 $f(x)+t(x-k)=0$ が t のすべての実数値に対して実数解をもつという．

(1)　$f(x)=0$ は実数解をもつことを示せ．

(2)　k と $f(x)=0$ の解との関係を求めよ．

(中央大)

D-2-⑤

6　2つの関数を $f(x)=x^2-4x+6$，$g(x)=-x^2+2ax+2a-6$ とする．次の場合の実数値 a の範囲を，それぞれ求めよ．

(1)　どんな実数値 x に対しても $g(x)<c<f(x)$ が成り立つような x に関係して定まる定数 c がとれる．

(2)　どんな実数値 x に対しても $g(x)<c<f(x)$ が成り立つような x に無関係な定数 c がとれる．

(神奈川大)

D-2-⑥

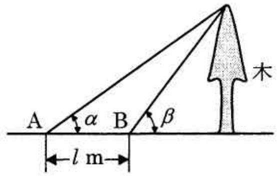
7　すべての実数 x，y に対して，$x^2-2kxy+y^2+(k-1)y+1 \geqq 0$ が成り立つような定数 k の範囲を求めよ．

(甲南大)

D-2-⑦

第4章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆ STEP A ◆◆◆◆◆◆



1　平地に立っている木の高さを知るために，木の前方の地点Aから測った木の頂点の仰角がα，Aから木に向かってl m 進んだ地点Bから測った仰角がβであった．木の高さをh mとし次の問いに答えよ．

(1)　hをα，β，lを使って表せ．

(2)　$\alpha=30°$，$\beta=45°$，$l=10$のとき，hを求めよ．

(長崎総合科学大)

D-2-⑧

2　三角形ABCにおいて，$A=45°$，$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$のとき，B，C，cを求めよ．

(学習院大)

D-2-⑨

3　三角形ABCにおいて，AB＝3，AC＝2，∠A＝60°とする．∠Aの2等分線とBCとの交点をPとするとき，BC，AP，BPの長さを求めよ．

(慶応大)

D-2-⑩

◆◆◆◆◆◆ STEP B ◆◆◆◆◆◆

4　△ABCにおいて，底辺BCが固定され

$$a\cos A+b\cos B=c\cos C$$

という条件のもとで頂点Aが動くとき，Aはどんな図形をえがくか．

(日本歯大)

D-2-⑪

5　△ABCにおいて，次の関係の成り立つことを証明せよ．

(1)　$\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(2)　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\leqq\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

(近畿大)

D-2-⑫

6　正四面体ABCDにおいて，辺CDを$1:k$に内分する点Pが$\cos^2\angle\mathrm{ABP}=\cos\angle\mathrm{APB}$を満たしているとき，$k$の値を求めよ．

(香川大)

D-3-①

7　△ABCの3辺の長さa，b，cの間に$2a=b+c$という関係があるとき，$bc=x$とおいて，次の問いに答えよ（a，b，cはそれぞれ辺BC，CA，ABの長さを表す）．

(1)　$\sin^2 A$をaとxを用いて表せ．

(2)　aが一定であるとき，△ABCの面積Sの最大値を求めよ．

(独協医大)

D-3-②

第5章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆◆

1　命題に関する法則$\overline{(p \text{かつ} q)} = (\overline{p} \text{または} \overline{q})$，$\overline{(p \text{または} q)} = (\overline{p} \text{かつ} \overline{q})$について，次の問いに答えよ．

(1)　この法則は何と呼ばれるか．

(2)　この法則が成り立つことを真理表(真偽表)を用いて示せ．　（東京経大）

D-3-③

2　命題p，q，rに関して「pが真ならばqまたはrが真である」が成り立つとき，このことから導くことができる命題は次のうちどれか．

①　rが偽ならばpも偽である．

②　pが偽ならばqは真である．

③　qが偽でpが真ならばrは真である．

④　pが偽ならばqもrも偽である．

⑤　rが真ならばpは真である．　（防衛医大）

D-3-④

◆◆◆◆◆◆◆　STEP B　◆◆◆◆◆◆◆

3　整数全体の集合をZで表す．Zの部分集合Aは次の条件[1]，[2]を満たしている．

[1]　$1 \in A$　　　[2]　$x \in A$，$y \in A$　ならば　$x - y \in A$

このとき，$A = Z$となることを示せ．　（東北学院大）

D-3-⑤

4　次の$\boxed{}$の中にあてはまる番号は下記の①～④のうちのどれであるか．

(1)　長さa，b，cの3つの線分が鋭角三角形を作りうるためには，
$|a^2-b^2| < c^2 < ab$は$^{\text{i}}\boxed{}$である．また，$|a^2-b^2| < c^2 < (a+b)^2$は$^{\text{ii}}\boxed{}$である．

(2)　$|x| \leqq 1$かつ$|y| \leqq 2$は$|2x|+|y| \leqq 2$であるための$^{\text{iii}}\boxed{}$である．

(3)　任意の整数xに対して，ax^2+bx+cが2で割り切れるためには，a，b，cが偶数であることは$^{\text{iv}}\boxed{}$である．ただし，a，b，cは整数である．

①　必要条件　　②　十分条件　　③　必要かつ十分な条件

④　必要でも十分でもない条件　（早稲田大）

D-3-⑥

第6章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆◆

1　B，O，O，K，Sという文字がそれぞれ書かれた５枚のカードがある．４枚だけ使用してできる単語は(1)$\boxed{}$種類である．また１枚以上のカードを使用してできる単語は全部で(2)$\boxed{}$種類である．

（日本医大）

D-3-⑦

2　(1)　６個の文字S，A，N，D，A，Iをいろいろな順序で横に一列に並べる．SはNよりも左方にあり，しかもIはNよりも右方にあるようにしたい．このような並べ方は全部で何通りあるか．

（京都産大）

(2)　白，赤，緑の玉が２個ずつある．これら６個の玉をA，B，C３個の箱へ２個ずつ入れる入れ方は何通りあるか．ただし，同色の玉が同一の箱に入らないものとする．　（神奈川大）

D-3-⑧

3　６人を３組に分けるについて，

(1)　２人ずつ３組に分ける方法の数は$\boxed{}$である．

(2)　１人，２人，３人と分ける方法の数は$\boxed{}$である．

(3)　３組に分ける方法の総数は$\boxed{}$である．ただし，どの組にも１人は属するものとする．

(4)　(3)のうち，ある２人が同じ組にはいる場合の数は$\boxed{}$である．

(5)　(3)のうち，ある３人が同じ組にはいる場合の数は$\boxed{}$である．　（立命館大）

D-3-⑨

4　展開式$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$（$n$は正の整数）を利用して，次の問いに答えよ．

(1)　$(1+2x)^{10}$の展開式においてx^4の係数を求めよ．

(2)　a，bに適当な値を与えることにより，次の式を簡単にせよ．

$$ {}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{2^n} $$

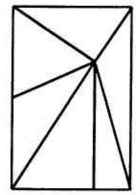
(3)　(2)で求めた式をa_nとおくとき，$\sum_{n=1}^{8}a_n$の値を求めよ．　（福岡工大）

D-3-⑩

（注）　$\sum_{n=1}^{8}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8$である．

◆◆◆◆◆◆◆ STEP B ◆◆◆◆◆◆◆

5 長方形を右の図のように6つの三角形に分け，赤，青，黄の3色を使って(1)〜(3)の条件をすべて満たすように塗り分けたい．



(1) それぞれの三角形を赤，青，黄の中の1色だけで塗りつぶす．
(2) 1辺を共有する2個の三角形を異なる色で塗る．
(3) 赤，青，黄のうちで使わない色はない．

このとき塗り方は幾通りあるか．

（同志社大）

D-3-⑪

6 (1) 互いに区別できない $(n+4)$ 個のもの全部を n 人（$n \geqq 4$）に分配する方法は何通りあるか．ただし，どの人にも少なくとも1個は与えるものとする．（関西大）

(2) 10人の選挙人が3人の候補者に投票する．つぎのおのおのの場合の投票結果の個数を求めよ．

(A) 無記名投票の場合
(B) 記名投票の場合

D-3-⑫

7 整数 1，2，3，……，100 から2個の異なる数を選んで作る組合せのうち，次の組合せは何通りあるか．

(1) 積が3の倍数になる組合せ
(2) 積が4の倍数になる組合せ

（茨城大）

D-3-⑬

8 二項展開 $(1+x)^{10}=\sum_{r=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_r x^r$ …①について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_{r+1}}{{}_{10}\mathrm{C}_r}\begin{cases} \geqq \dfrac{6}{5} (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ \leqq \dfrac{5}{6} (r=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9) \end{cases}$ であることを示せ．

(2) $\dfrac{5}{6}<x<\dfrac{6}{5}$ とするとき，①の展開式の中央項が最大となることを示せ．（東北工大）

（注） $(1+x)^{10}=\sum_{r=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_r x^r$

$={}_{10}\mathrm{C}_0 r^0+{}_{10}\mathrm{C}_1 r+{}_{10}\mathrm{C}_2 r^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10} x^{10}$

である．ただし，$r^0=1$ とする．

D-3-⑭

第7章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆◆

1　赤色のカードと青色のカードが，それぞれn枚ずつあり，それらには，それぞれ1からnまでの番号がついている．この$2n$枚のカードを，いっしょによく混ぜて２枚を抜き出したとき，これらの２枚が異なった色でかつ赤の番号より青の番号が大きい確率を求めよ．　(創価大)

D-4-①

2　正しく作られたさいころ１個を10回振るとき，次の確率を求めよ．

(1)　１の目も６の目も出ない確率

(2)　１の目は出るが６の目は出ない確率

(3)　１の目と６の目の両方が出る確率　(慶応大)

D-4-②

3　極めて多数からなる製品の集まりがあり，この不良率を$p\ (0<p<1)$とする．この集まりから３個の製品を抜き取り検査をして不良品が１個もなければ合格，１個でもあれば不合格とする．次の問いに答えよ．

(1)　製品の集まりが合格になる確率を求めよ．

(2)　不良品が２個ある確率を求めよ．

(3)　$p=0.04$のとき製品の集まりが不合格になる確率を求めよ（小数第３位まで）．

(4)　合格になる確率が，72.9%のときのpを求めよ．　(長崎総合科学大)

D-4-③

4　1，2，…，6 の目の出る確率が，それぞれの目の数に比例するように作られたサイコロがある．このサイコロを投げるとき次の問いに答えよ．

(1)　１回投げるとき，出る目の数の期待値を求めよ．

(2)　３回投げるとき，出る目の数の和が15になる確率を求めよ．　(川崎医大)

D-4-④

5　互いに勝つ確率が$\dfrac{1}{2}$の野球チームが４チームある．リーグ戦を行い，最高勝率を得たチームが１チームの場合には，そのチームが優勝とする．もし，そのようなチームが複数の場合には，優勝は決まらないとする．ただし，各試合において引き分けはないとする．

(1)　リーグ戦の試合数を求めよ．

(2)　リーグ戦の結果の勝敗表は何通りあるか．

(3)　あるチームが２勝１敗では優勝できないことを説明せよ．

(4)　リーグ戦後，優勝の決まっている確率を求めよ．　(岡山理大)

D-4-⑤

6 白玉n個と黒玉20個が入った袋がある．よくかき混ぜて20個の玉を取り出すとき，その玉が黒玉5個，白玉15個である確率を$f(n)$とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(n)$を求めよ．

(2) $f(n)$を最大にするnを求めよ．ただしnは15より大なる正の整数である．（九州歯大）

D-4-⑥

7 A君は次のように考えた．

「サイコロを6回振ることにする．$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$の各々について，m回目に1の目が出る確率は$\dfrac{1}{6}$である．したがって，6回のうちに少なくとも1回 1 の目が出る確率は$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=1$である．すなわち，サイコロを6回振れば少なくとも1回は1の目が出る．」

A君の考えは正しいかどうかをいえ．もし正しくないならば，誤りの原因を，なるべく簡潔に指摘せよ．（京都大）

D-4-⑦

8 数字を記入したカードが10枚袋の中に入っている．そのうちわけは1が2枚，2が2枚，3が3枚，4が2枚，5が1枚である．

(1) 袋の中から同時に3枚取り出すとき，取り出されたカードに記入されている数の和が4で割り切れる確率を求めよ．

(2) 3枚取り出して数の和を求めてはもとへもどす試行を5回繰り返す．このとき数の和が4で割り切れる場合がi回起こる確率をP_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$で表す．$P_i$を最大にする$i$を求めよ．（都立大）

D-4-⑧

9 次のようなゲームがある．

(1)最初の持ち点は2である．

(2)サイコロを振って，奇数の目が出れば持ち点が1点増し，偶数の目が出れば持ち点が1点減る．このような操作を5回する．ただし，途中で持ち点が0になったら，その時点でゲームは終了する．

このゲームについて，5回サイコロを振ることができる確率，およびゲームが終わったときの持ち点の期待値を求めよ．（京都大）

D-4-⑨

10 ある硬貨を投げるとき，表と裏がおのおの確率$\dfrac{1}{2}$で出るものとする．この硬貨を8回繰り返して投げ，n回目に表が出れば$X_n=1$，裏が出れば$X_n=-1$とし，

$$S_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n\ (1\leqq n\leqq 8)$$

とおく．このとき次の確率を求めよ．$S_2\neq 0$かつ$S_8=2$となる確率．（東京大）

D-4-⑩

第8章　総合問題演習

◆◆◆◆◆◆◆　STEP A　◆◆◆◆◆◆◆

$\boxed{1}$　△ABC の外心をOとし, A , C からそれぞれ対辺におろした垂線の交点(垂心)をHとする. BO の延長が△ABC の外接円と交わる点をNとするとき， AH = CN を証明せよ.

(山口大)

D-4-⑪

◆◆◆◆◆◆◆　STEP B　◆◆◆◆◆◆◆

$\boxed{2}$　円O外の1点Pからこの円に2つの接線をひいて接点をA， Bとし， AB と OP の交点をHとする. また， Pからこの円に任意の割線をひき，円Oとの交点をQ， Rとする. このとき， 4点O， H， Q， Rは同一円周上にあることを証明せよ.

(新潟大)

D-4-⑫