講座内容／目次

数学Ⅰ

数学A

数学Ⅱ

数学B

1 2次関数のグラフ

☞解答は「解説と解答」p. 4

第1講座
数学Ⅰ

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 6〜14 参照〕

1. 2次関数のグラフは，どのような放物線であるかを理解する。

2. 平行移動の原理を知る。

3. 2次関数の標準形への変形。

例題 1 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，軸の方程式が $x=4$ で，2点 $(2,\ 1)$，$(5,\ -2)$ を通るという。a，b，c の値を求めよ。

(2) (1)の放物線は，放物線 $y=a(x-2)^2+1$ を，x 軸方向へ p，y 軸方向へ q 平行移動したものである。p，q を求めよ。

●解答へのApproach

(1) この放物線は，$x=$〔　　〕が軸だから，次のようにおいてよい。

$$y=a(x-4)^2+k$$

点$(2,\ 1)$を通るから，　$1=a(2-4)^2+k$

点$(5,\ -2)$を通るから，〔　　〕$=a(5-4)^2+k$

すなわち，
$$\begin{cases} 1=〔\quad〕a+k & \cdots\cdots① \\ 〔\quad〕=a+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①−②から 〔　　〕$=3a$　よって，$a=$〔　　〕

②　から $k=-a-$〔　　〕$=$〔　　〕

よって，　$y=(x-4)^2-$〔　　〕$=x^2-$〔　　〕$x+$〔　　〕

(答) $a=$〔　　〕，$b=$〔　　〕，$c=$〔　　〕

(2) (1)の放物線は $y=(x-4)^2-$〔　　〕だから，頂点の座標は$(4,$〔　　〕$)$

$a=1$ で，　$y=(x-2)^2+1$ の頂点の座標は(〔　　〕，〔　　〕)

よって，これを x 軸方向へ $4-2=$〔　　〕，y 軸の方向へ〔　　〕-1

$=$〔　　〕平行移動すれば，(1)の放物線となる。

(答) $p=$〔　　〕，$q=$〔　　〕

解法のPoints

←軸がわかっているから，この形のほうが便利。

←$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

例題 2　2次関数　$y=ax^2+bx+c$ のグラフは，3点（−1，6），（1，0），（2，3）を通る。

(1)　a，b，c の値を求めよ。

(2)　このグラフとなる放物線の頂点と軸の方程式を求めよ。

●解答へのApproach

(1)　$y=ax^2+bx+c$ のグラフが

（−1，6）を通るから，　$6=a-b+c$　……①

（1，0）を通るから，　$0=$〔　　〕　……②

（2，3）を通るから，　〔　　〕$=$〔　　〕　……③

②−①から　$-6=$〔　　〕　よって，　$b=$〔　　〕

③−②から

$3=$〔　　〕$a+b=$〔　　〕$a-$〔　　〕

$3a=$〔　　〕，　$a=$〔　　〕

②から　$c=-a-b=$〔　　〕

（答）　$a=$〔　　〕，$b=$〔　　〕，$c=$〔　　〕

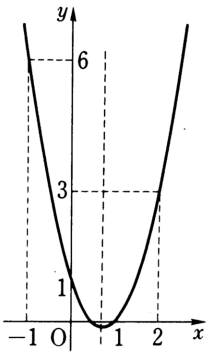
(2)　$y=2x^2-3x+1=2\left\{x^2-\frac{3}{2}x+\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{②}\right\}+1$

①

$=2\left(x-\left[\quad\quad\right]\right)^2-\left[\quad\quad\right]$　⇦③

よって，頂点の座標は　$\left(\left[\quad\quad\quad\right]\right)$

軸の方程式は　$x=\left[\quad\quad\quad\right]$　……（答）



解法のPoints

←標準形への変形

① x^2の係数でくくる。

② x の係数の半分の2乗を加えて引く。

③ {　　}内の最初の3項を因数分解し，残りをまとめる。

例題 3 次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2-6x+15$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ が 2 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ -3)$ を通るとき，a と b の値を求めよ。また，この頂点の座標を求めよ。

●解答への Approach

(1) まず，この放物線を標準形に変形しよう。

$$y=x^2-6x+〔\quad〕^2-〔\quad〕^2+15$$
$$=(x-〔\quad〕)^2+〔\quad〕$$

よって，この放物線の頂点の座標は　(〔　〕，〔　〕)

この点を，x 軸方向に -2，y 軸の方向に 1 だけ平行移動すると

〔　〕$-2=$〔　〕，　〔　〕$+1=$〔　〕

よって，求める方程式は

$y=(x-〔\quad〕)^2+7=x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕$　……(答)

《別解》

はじめから $x\to x+2$，　$y\to y-〔\quad〕$ とすれば

$$y-〔\quad〕=(x+2)^2-6(x+2)+15$$
$$=x^2+〔\quad〕x+4-6x-〔\quad〕+15$$
$$=x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕$$

よって，　$y=x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕$

(2) $y=x^2+ax+b$ が

点 $(1,\ 0)$ を通るから　$0=1+a+b$　…… ①

点 $(2,\ -3)$ を通るから　$-3=〔\quad〕+〔\quad〕a+b$　…… ②

②−①から　$-3=〔\quad〕+a$　よって，　$a=〔\quad〕$

①から　$b=-a-1=〔\quad〕$

以上から，この放物線の方程式は

$$y=x^2-〔\quad〕x+5$$
$$=x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕^2-〔\quad〕^2+5$$
$$=(x-3)^2-〔\quad〕$$

(答) $\begin{cases} a=〔\quad〕,\ b=〔\quad〕 \\ \text{頂点の座標は}(〔\quad〕,\ 〔\quad〕) \end{cases}$

解法の Points

← 1 次の項の係数の半分の 2 乗を加えて引く。

←平行移動の原理

← $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

← $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 6）

1 軸が $x=-1$ で，2点 $(2,\ 3)$，$(-2,\ 5)$ を通る放物線の方程式を求めよ。（日本工大）

2 放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動した曲線が2点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通るとき，この曲線の方程式を求めよ。（実践女大）

3 次の2次関数の表す放物線の頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-5x+4$

(2) $y=5-4x-2x^2$

(3) $y=(2x-3)(5-x)$

4 2次関数のグラフが $(0,\ 4)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 7)$ の3点を通るとき，頂点の座標を求めよ。（追手門学院大）

5 $y=2x^2$ のグラフは，$y=2x^2-x$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。p と q の値を求めよ。（第一経大）

6 点 $(0,\ 5)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(1,\ 3)$ を頂点にもつとき，a，b，c の値を求めよ。（岡山商大）

7 放物線 $y=ax^2+bx+3$ が2点 $(1,\ 13)$，$(-1,\ -3)$ を通過するとき，a，b の値はいくつか。また，この放物線の頂点の座標を求めよ。

8 放物線 $y=x^2+2ax+b$ が x 軸に接していて，点 $(0,\ 4)$ を通るとき，a，b の値を求めよ。

9 2次関数 $y=ax^2+bx+3a$ のグラフが点 $(2,\ 30)$ を通り，直線 $x=-2$ に関して対称であるとき，b の値を求めよ。（国士舘大）

Hints

1 例題1の(1)と同じ考え方。

2 $y=x^2$ を平行移動すれば，$y=x^2+px+q$

3 標準形への変形。

4 例題2と同じ考え方。

5 $y=2x^2-x$ を標準形に変形するか，または直接に平行移動の原理を使う。

6 頂点がわかっているから，
$$y=a(x-1)^2+3$$
とおく。

7 例題3の(2)と同じ考え方。

8 x 軸に接するとき，頂点の y 座標は0

9 直線 $x=-2$ に関して対称なら，頂点の x 座標は -2

2 ―― 2 次関数の最大・最小

☞解答は「解説と解答」p. 8

第 2 講座
数学 I

■この講座のねらい■　〔「数学αの完全整理」p. 15〜17 参照〕

1． 2 次関数の最大・最小問題。

2． 定義域が制限されたときの最大・最小問題。

3． x と y を含む最大・最小問題。

例題 1　次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y=-2x^2+2x-3$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき，関数 $y=3x^2+12x+8$ の最大値と最小値を求めよ。

●解答への Approach

(1)　$y=-2x^2+2x-3$

$=-2\left(x^2-x+\left[\quad\right]-\left[\quad\right]\right)-3$

$=-2\left(x-\left[\quad\right]\right)^2+\left[\quad\right]-3$

$=-2\left(x-\left[\quad\right]\right)^2-\left[\quad\right]$

$x=0$ のとき　$y=-3$，　$x=2$ のとき $y=[\quad]$

よって，

$x=\left[\quad\right]$ のとき　最大値 $\left[\quad\right]$
$x=[\quad]$ のとき　最小値 $[\quad]$　…… (答)

(2)　$y=3x^2+12x+8$

$=3(x^2+[\quad]x+[\quad]-[\quad])+8$

$=3(x+[\quad])^2-[\quad]+8$

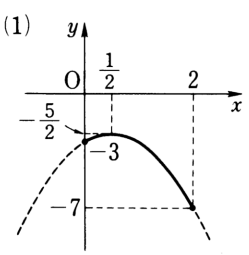
$=3(x+[\quad])^2-[\quad]$

$x=-1$ のとき $y=[\quad]$，$x=1$ のとき $y=[\quad]$

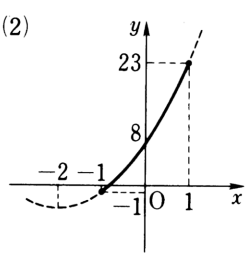
よって，

$x=[\quad]$ のとき　最大値 $[\quad]$
$x=[\quad]$ のとき　最小値 $[\quad]$　…… (答)

(1)



(2)



解法の Points

←標準形への変形。

←標準形への変形。

← $x=-2$ は範囲外であることに注意。

←このグラフは，見やすくするために，x 軸と y 軸の単位の長さを変えてかいてある。

例題 2 $0 \leqq x \leqq 2$ を定義域とする関数 $y=3x^2-6ax+2$ の最大値および最小値を，次の場合について求めよ。

(1) $a \leqq 0$　　(2) $0<a<1$　　(3) $a=1$

(4) $1<a<2$　　(5) $a \geqq 2$　　（北海道薬大）

●解答へのApproach

まず，標準形に変形すると，

$$y=f(x)=3x^2-6ax+2$$
$$=3(x^2-\boxed{}ax+a^2-a^2)+\boxed{}$$
$$=3(x-a)^2-\boxed{}a^2+2$$

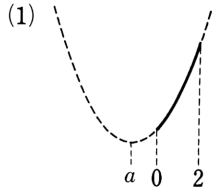
ここで，グラフの概形により，最大値と最小値は次のようになる。

(1) $a \leqq 0$ のとき：

最大値は　$f(2)=12-12a+2$

$=\boxed{}-12a$

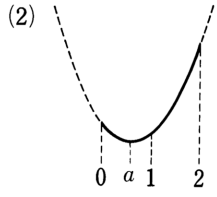
最小値は　$f(0)=2$　……（答）



(2) $0<a<1$ のとき：

最大値は　$f(2)=\boxed{}$

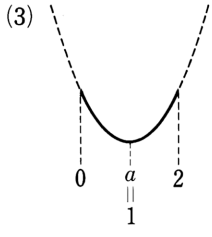
最小値は　$f(a)=-\boxed{}a^2+2$　……（答）



(3) $a=1$ のとき：

最大値は　$f(0)=f(2)=\boxed{}$

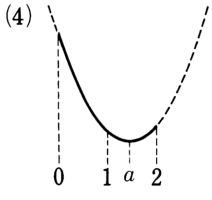
最小値は　$f(a)=-3a^2+2=\boxed{}$　……（答）



(4) $1<a<2$ のとき：

最大値は　$f(0)=\boxed{}$

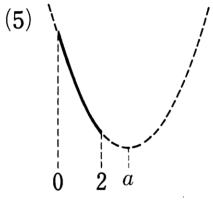
最小値は　$f(\boxed{})=-3a^2+2$　……（答）



(5) $2 \leqq a$ のとき：

最大値は　$f(0)=\boxed{}$

最小値は　$f(\boxed{})=\boxed{}$　……（答）



解法のPoints

←グラフの概形は，定義域と軸との位置関係によって5種類に分かれる。

←グラフの実線の部分で，y 座標が最大の点と最小の点の y 座標を求める。

例題 3 次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で，x と y との間に，$x+2y=4$ の関係があるとき，
$x^2+xy-y^2-2x+14y+20$ の最大値と最小値を求めよ。 (道都大)

(2) 2 次式 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を $M(k)$ とする。$M(k)$ が最大になるときの k の値を求めよ。
(東京情報大)

●解答への Approach

(1) $x+2y=4$ から　　$x=4-2y$ ……①

これを与えられた式に代入すると

$x^2+xy-y^2-2x+14y+20$

$=(4-2y)^2+$〔　　〕$y-y^2-2$〔　　〕$+14y+20$

$=16-16y+4y^2+4$〔　　〕$-2y^2-y^2-$〔　　〕$+$〔　　〕$y+14y+20$

$=y^2+$〔　　〕$y+$〔　　〕

$=y^2+$〔　　〕$y+9-$〔　　〕$+28$

$=(y+3)^2+$〔　　〕

①から　$x=4-2y \geqq 0$,　$4 \geqq 2y$,　$2 \geqq y$

よって，　〔　　〕$\leqq y \leqq$〔　　〕

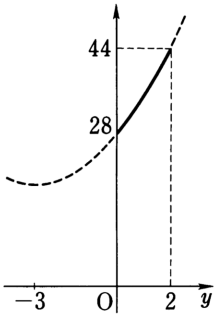
また，右のグラフより，

最大値は　$y=$〔　　〕　のとき

$5^2+19=25+19=$〔　　〕 ……(答)

最小値は　$y=$〔　　〕　のとき

$3^2+19=$〔　　〕$+19=$〔　　〕 …(答)



(2) まず，標準形に変形する。

$y=x^2+4kx+24k$

$=x^2+4kx+$〔　　〕$^2-$〔　　〕^2+24k

$=(x+$〔　　〕$)^2-4k^2+24k$

これから，y の最小値は，次の k についての 2 次関数である。

$$M(k)=-4k^2+24k$$

この最大値を求めるために，ふたたび標準形に変形する。

$M(k)=-4(k^2-$〔　　〕$k+$〔　　〕$-$〔　　〕$)$

$=-4(k-$〔　　〕$)^2+36$

よって，$M(k)$ が最大値 36 をとるとき，　　$k=$〔　　〕　……(答)

解法の Points

← $y=-\frac{1}{2}x+2$ としてもよいが，分数がめんどう。

← これを y についての標準形に変形する。

← これで y の変化する範囲が確定する。

← k^2 の係数が負だから，今度は最大値がある。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 10）

1 $y=x^2+ax+b$ が $x=-2$ のとき最小値 -1 をとる。このとき，a，b の値を求めよ。（朝日大）

2 関数 $y=2x^2+3x+1$ のグラフは，関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 平行移動したものである。$f(x)$ の最小値および a，b，c の値を求めよ。（東京家政学院大）

3 a を定数として，2 次関数 $y=9x^2+ax+12$ が正の数 b によって，$y=(3x-b)^2+8$ と表されるとき，a，b の値を求めよ。また，この関数が最小値をとるときの x の値を求めよ。（大妻女大）

4 x の関数 $f(x)=x^4+2tx^2+2t^2+t$ の最小値を $m(t)$ とする。$m(t)$ の最小値はいくらか。（工学院大）

5 2 つの変数 x，y が $2x+y=8$ をみたしているとき，xy の最大値を求めよ。（聖徳学園岐阜教育大）

6 $f(x)=ax^2+bx+c$ は，$f(1)=13$，$f(2)=14$，$f(3)=18$ をみたす。a，b，c の値を求め，さらに $f(x)$ の最小値を求めよ。（近畿大）

7 x の 2 次関数 $f(x)=-x^2+6kx-10k^2+10k+2$ は，最大値 27 をとるが，そのときの k と x の値を求めよ。（武蔵大）

8 $f(x,y)=x^2-4xy+5y^2-4y+3$ の最小値を求め，そのときの x，y の値を求めよ。（名古屋学院大）

Hints

1 標準形を考えればよい。

2 標準形へ変形すれば，$f(x)$ の正体もわかる。

3 標準形を展開して，もとの式とくらべればよい。

4 $x^2=X$ とおけば，例題3の(2)と似ている。

5 例題 3 の(1)と同じ考え方。

6 まず，a，b，c を第 1 講座の例題 2 にならって求めよ。

7 x の 2 次関数として最大値 $m(k)$ の値が 27 である。

8 まず x の 2 次関数として最小値 $m(y)$ を求めて 4 にならえ。

3 ―― 2 次方程式と 2 次不等式

☞解答は「解説と解答」p. 12

第 3 講座
数学 I

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 18〜27 参照〕

1．特殊な形の因数分解になれること。

2．2 次方程式の解法。

3．2 次不等式の解法。

例題 1 次の各式を因数分解せよ。

(1) $2x^2-50$　　(2) $3x^2y-18xy+27y$

(3) $6x^2+13x-5$

●解答への Approach

(1) $2x^2-50=2(x^2-[\quad])$

$=2([\quad]^2-[\quad]^2)$

$=2([\quad+\quad])([\quad-\quad])$ ……(答)

(2) $3x^2y-18xy+27y=3y(x^2-[\quad]x+[\quad])$

$=3y(x^2-2\times[\quad]\times x+[\quad]^2)$

$=3y([\quad])^2$ ……(答)

(3) $6x^2+13x-5$ で，x^2 の係数 6 と，定数項の絶対値 5 に着目。

$\begin{cases} 6 \text{ は } 1\times6 \text{ または } 2\times3 \text{ と考える。} \\ 5 \text{ は } 1\times5 \text{ と考える。} \end{cases}$

$\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\times\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\longrightarrow 30$　$\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\times\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\longrightarrow 6$　$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\times\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\longrightarrow 15$　$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\times\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\longrightarrow[\quad]$

$\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\times\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\longrightarrow 1$，$\begin{matrix}1\\6\end{matrix}\times\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\longrightarrow 5$，$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\times\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\longrightarrow 2$，$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\times\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\longrightarrow[\quad]$

この中で，和または差が x の係数 13 となるものをさがす。
定数項が正の数ならば和で，負の数ならば差である。

よって，本問の答えは $6x^2+13x-5=(2x+[\quad])([\quad])$ ……(答)
で，$6x^2+13x-5=(2x+1)(3x+5)$ はまちがい。

解法の Points

●因数分解のコツ

1．まず共通因数でくくる。
2．公式がすぐに使えないか。
3．場合によっては，2 項ずつ，または 3 項と 1 項に分けて考える。

←たすき掛けの原理を理解しよう。（数学A）

←この問題では，和または差が 13 になるものが 2 つもある。
見分け方は定数項の符号！

例題 2 次の問いに答えよ。

(1) 次の 2 次方程式を解け。

(i) $3x^2+4x-15=0$　　(ii) $(x-4)(2x-3)=7$

(2) 次の連立方程式を解け。 $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2-3xy+5y^2=5 \end{cases}$

●解答への Approach

(1) (i) 左辺を因数分解して，　$(3x-5)(〔\quad\quad〕)=0$

ゆえに，　$3x-5=0$ または 〔　　〕$=0$

よって，　$x=\dfrac{5}{3}$ または $x=〔\quad〕$　……(答)

(ii) 左辺を展開して，　$2x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕=7$

左辺に集めて　$2x^2-〔\quad〕x+〔\quad〕=0$

因数分解して　$(x-5)(〔\quad\quad〕)=0$

$x-5=0$ または 〔　　〕$=0$

よって，　$x=5$ または $x=〔\quad〕$　……(答)

(2) $x-2y=1$ ……①，　$x^2-3xy+5y^2=5$ ……② とおく。

①から　$x=2y+1$

これを②に代入すると

$(〔\quad\quad〕)^2-3(〔\quad\quad〕)y+5y^2=5$

$4y^2+〔\quad\quad〕-6y^2-〔\quad\quad〕+5y^2=5$

$3y^2+〔\quad〕y-〔\quad〕=0$

$(3y+4)(〔\quad\quad〕)=0$

$y=-\dfrac{4}{3}$ のとき　$x=2y+1=2\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)+1=〔\quad〕$

$y=〔\quad〕$ のとき　$x=2y+1=〔\quad〕+1=〔\quad〕$

(答) $x=〔\quad〕$，$y=-\dfrac{4}{3}$；$x=〔\quad〕$，$y=〔\quad〕$

解法の Points

←$3=a\times c$，$-15=b\times d$，$bc+ad=4$ となる組合せをさがす。

←まず左辺を展開し，すべてを左辺に集めて整理し，次に(i)と同様に考えればよい。

←2 次と 1 次の連立方程式では 1 次方程式を 1 つの未知数について解いて，2 次方程式に代入する。

例題 3 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を解け。

(i) $-8x-6>-5x-15$　　(ii) $2x^2-5x-3>0$

(iii) $12+4x\geqq x^2$　　(iv) $x^2+9\leqq 6x$

(2) 次の 2 つの 2 次不等式を同時に満足する x の整数値を求めよ。

$$\begin{cases} x^2>2x+15 \\ x^2<3x+40 \end{cases}$$

●解答への Approach

(1) (i) $-8x-6>-5x-15$,　$-6+15>-5x+$〔　　〕

$9>$〔　　〕x　　よって，　$x<$〔　　〕　……(答)

(ii) $2x^2-5x-3=(x-3)($〔　　〕$)>0$

よって，　$x<$〔　　〕，〔　　〕$<x$　……(答)

(iii) $12+4x\geqq x^2$,　$0\geqq x^2-4x-12=(x+2)($〔　　〕$)$

よって，　〔　　〕$\leqq x\leqq$〔　　〕　……(答)

(iv) $x^2+9\leqq 6x$,　$x^2-6x+9=($〔　　〕$)^2\leqq 0$

よって，　$x=$〔　　〕　……(答)

(2) まず，それぞれの不等式を解く。

$x^2>2x+15$ を解くと，

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+\text{〔　　〕})>0$$

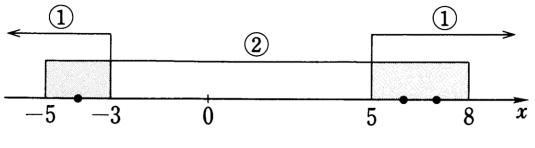
よって，　$x<-$〔　　〕，$5<x$　……①

$x^2<3x+40$ を解くと，

$$x^2-3x-40=(x-8)(x+\text{〔　　〕})<0$$

よって，　$-$〔　　〕$<x<$〔　　〕　……②

これらを数直線上に表すと



これらの共通部分は

$-5<x<$〔　　〕，〔　　〕$<x<$〔　　〕

この範囲に含まれる整数値は，小さいほうから順に

〔　　〕，〔　　〕，〔　　〕　……(答)

解法の Points

← 1 次方程式と 1 次不等式：x のある項とない項に分けよ。

← 2 次方程式と 2 次不等式：すべて 1 辺に集めて因数分解。

← $\alpha\leqq x\leqq\beta$ で，α と β が一致したと考えればよい。

←このように，2 つの不等式の共通範囲は，数直線上で考えよ。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 14）

1 次の各式を因数分解せよ。

(1) x^2-x-90　　(2) $8x^2-6x-5$

(3) $7t^2-10t+3$　　(4) $2x^3-5x^2-3x$

2 次のおのおのの 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+3x=0$　　(2) $x^2=144$

(3) $x^2+10x+24=0$　　(4) $x^2-7x+6=0$

(5) $6x^2+11x-10=0$　　(6) $4x^2-4x+1=0$

3 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy+2x+2y=2 \end{cases}$$

（中央学院大）

4 連続している 3 つの自然数の和を 3 倍すると，最小の数と中間の数の積になった。これらの数を求めよ。

5 次のおのおのの 2 次不等式を解け。

(1) $x^2-x\leqq 2$　　(2) $3x^2+11x-4>0$

(3) $x^2\geqq 2x+3$　　(4) $6x^2>7x+3$

6 不等式　$-5\leqq x^2+2x-8<7$ をみたす整数は，全部で何個あるか。

（千葉工大）

7 変数 x，y が関係式 $2x^2+3y^2=9y$ をみたしながら変化するとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。（九州東海大）

8 放物線 $y=x^2+2ax+b$ が x 軸に接していて，点 (1, 4) を通るとき，a，b の値を求めよ。（日本大-松戸歯）

Hints

1 たすき掛けの方法に強くなろう。

2 (5)はたすき掛け，あとは容易。

3 例題 2 の(2)の方法を使え。

4 これらの数を，$x-1$，x，$x+1$ として式をつくる。

5 1 辺に集めて，因数分解。

6 例題 3 の(2)と同じ考え方で解け。

7 $2x^2=9y-3y^2\geqq 0$ から y の範囲が定まる。

8 放物線が x 軸に接するから，$y=(x-p)^2$ の形。

4 集合とその要素の個数

☞解答は「解説と解答」p. 16

第4講座
数学Ⅰ

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 28〜35 参照〕

1．集合の考えと，その表し方。

2．集合についての記号と用語。

3．集合に含まれる要素の個数の数え方。

例題 1 200 から 400 までの正の整数のうちで，整数 k の倍数全体の集合を M_k で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) M_3 の要素の個数を求めよ。

(2) $M_3 \cap M_5$ の要素の個数を求めよ。

(3) $M_3 \cup M_5$ の要素の個数を求めよ。

●解答への Approach

(1) 200 から 400 までの整数のうちで，

3 の倍数の最小数は〔　　〕，最大数は〔　　〕

よって，3 の倍数の個数は

$$\frac{〔\quad〕-〔\quad〕}{3}+1=〔\quad〕\text{（個）}$$ ……(答)

(2) $M_3 \cap M_5$は，3 の倍数で，しかも 5 の倍数の集合だから，

15 の倍数，すなわち M_{15}と同じものである。

200 から 400 までの整数のうちで，

15 の倍数の最小数は〔　　〕，最大数は〔　　〕

よって，15 の倍数の個数は

$$\frac{〔\quad〕-〔\quad〕}{15}+1=〔\quad〕\text{（個）}$$ ……(答)

(3) まず，M_5に属する要素の個数を考えよう。

200 から 400 までの整数のうちで，

5 の倍数の最小数は〔　　〕，最大数は〔　　〕

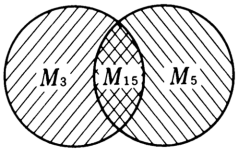
よって，5 の倍数の個数は

$$\frac{〔\quad〕-〔\quad〕}{5}+1=〔\quad〕\text{（個）}$$

求める $M_3 \cup M_5$に属する要素の数は，

M_3に属する要素の数と，M_5に属する要素の数との和から，M_{15}に属する要素の数をひいて，

〔　　〕+〔　　〕−〔　　〕=〔　　〕（個） ……(答)



解法の Points

←「200 から 400 まで」といったときには，200 も 400 もともに含まれることに注意。

←これは個数の数え方の原理となっている。しっかり理解しておこう。

← A に属する要素の数を $n(A)$ とすると，
$n(A \cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

例題 2 次の 3 つの集合がある：

$$A=\{x \mid x^2-2x-3>0\}$$
$$B=\{x \mid x^2-3x-10<0\}$$
$$C=\{x \mid x^2+ax+b\leqq 0\}$$

(1) $A\cap B$ を求めよ。

(2) $A\cup C=\{$すべての実数$\}$，$A\cap C=\{x \mid 3<x\leqq 5\}$ のとき，a，b の値を求めよ。

●解答への Approach

(1) まず，A と B とのそれぞれの 2 次不等式を解く。

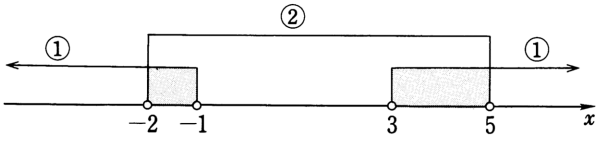
A：　$x^2-2x-3=(x+〔\quad〕)(x-3)>0$

よって，この解は　$x<〔\quad〕$，$〔\quad〕<x$　……①

B：　$x^2-3x-10=(x+2)(x-〔\quad〕)<0$

よって，この解は　$〔\quad〕<x<〔\quad〕$　……②

①と②の共通部分を考えるために数直線で考えると，



これを，集合の記号で表すと，

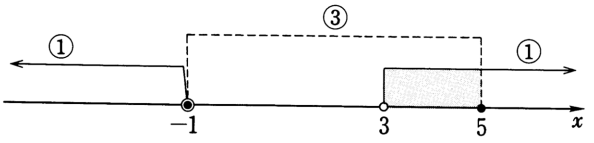
$A\cap B=\{x \mid 〔\quad〕<x<-1\}\cup\{x \mid 〔\quad〕<x<〔\quad〕\}$

……(答)

(2) 集合 C は，$x^2+ax+b\leqq 0$ をみたす x の集合だから，左辺を因数分解して $(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$（ただし $\alpha<\beta$）になるとすれば，解は

$\alpha\leqq x\leqq〔\quad〕$　……③

①と③を考えて $\left(\begin{array}{l} A\cup C \text{ がすべての実数} \\ A\cap C=\{x \mid 〔\quad〕<x\leqq 5\} \end{array}\right)$ となるためには



図で考えて，　$\alpha=〔\quad〕$，　$\beta=〔\quad〕$

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$
$$=x^2-〔\quad〕x-〔\quad〕$$

これから，　$a=〔\quad〕$，　$b=〔\quad〕$　……(答)

解法の Points

←第 3 講座参照。

←実質は，第 3 講座例題 3 の(2)と同種の問題。

←有理数と無理数をまとめて実数という(数学 A)。①と③で全実数。①と③の共通部分は $3<x\leqq 5$ だけとなるための，③の範囲を数直線で考える。

例題 3 教科a，b，cの受講生は，それぞれ50人，40人，70人であり，aとbを受講する学生は30人，aとbとcを受講する学生が20人いるという。教科a，b，cの受講生の集合をそれぞれA，B，Cとする。

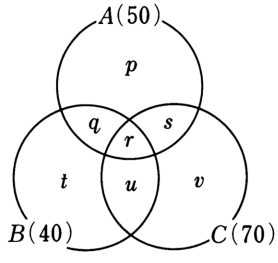
(1) $A\cup B\cap C$ がx人いるとするとき，xの範囲を求めよ。

(2) $A\cup B\cup C$ がy人いるとするとき，yの範囲を求めよ。 （九州国際大）

●解答へのApproach

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$，$A\cap B\cap\overline{C}$，$A\cap B\cap C$，$A\cap\overline{B}\cap C$，$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$，$\overline{A}\cap B\cap C$，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ に属する人数をそれぞれp，q，r，s，t，u，vとすると，題意より

$$\begin{cases} p+q+r+s=50 & \cdots\cdots① \\ q+r+u+〔\quad〕=40 & \cdots\cdots② \\ r+s+u+〔\quad〕=70 & \cdots\cdots③ \\ q+r=〔\quad〕 & \cdots\cdots④ \\ r=〔\quad〕 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$



④と⑤から，　$q=〔\quad〕$，$r=20$

これを①，②，③に代入すると

$$\begin{cases} p+s=〔\quad〕 & \cdots\cdots①' \\ t+u=〔\quad〕 & \cdots\cdots②' \\ s+u+v=〔\quad〕 & \cdots\cdots③' \end{cases}$$

①′から　$s=〔\quad〕-p$，　$0\leqq p$，$0\leqq s$　から　$0\leqq s\leqq〔\quad〕$

②′から同様に　$0\leqq u\leqq〔\quad〕$

③′から　$v=〔\quad〕-s-u$

これに上の範囲を考えて，

$$〔\quad〕\leqq v\leqq〔\quad〕$$

(1) ③′を使って，xをvで表すと，

$$x=r+s+u=20+s+u=20+〔\quad〕-v=〔\quad〕-v$$

vの範囲がわかっているから，

$$〔\quad〕\leqq x\leqq〔\quad〕 \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\begin{aligned} y&=p+q+r+s+t+u+v \\ &=(p+q+r+s)+(q+r+u+〔\quad〕)-(q+r)+v \\ &=〔\quad〕+〔\quad〕-30+v=v+〔\quad〕 \end{aligned}$$

vの範囲がわかっているから

$$〔\quad〕\leqq y\leqq〔\quad〕 \qquad \cdots\cdots(答)$$

解法のPoints

←図だけながめて，クイズ的に解くこともできるが，連立方程式で考えてみよう。

←学生の人数だから，≧0

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 18）

1 自然数の集合を全体集合とし，A を 24 の約数の集合，B を 36 の約数の集合とする。このとき $\overline{A}\cap B$ の要素の個数を求めよ。（武蔵大）

2 1 から 100 までの整数のうちで，2 の倍数でも 3 の倍数でもない整数の個数を求めよ。（日本福祉大）

3 50 以下の 2 けたの自然数で，3 で割って 1 が余る数の全体の集合を A，5 で割って余りが 2 となる数の集合を B とするとき，集合 $A\cap B$ の要素の個数 $n(A\cap B)$ を求めよ。（東京国際大）

4 M は 7 個の元(要素)よりなる集合である。a を M のある元とすると，a を元として含む M の部分集合は全部で何個あるか。（愛知工大）

5 $U=\{x \mid 10\leqq x\leqq 20,\ x$ は整数$\}$を全体集合とし，次の A，B は U の部分集合とする。$A=\{x \mid x=2n+1,\ 5\leqq n\leqq 9,\ n$ は整数$\}$，
$B=\{x \mid x=3n-2,\ 4\leqq n\leqq 7,\ n$ は整数$\}$。このとき，集合$\overline{A\cup B}$ の要素の個数を求めよ。（国士舘大）

6 1 以上 50 以下の整数の集合を全体集合 U とする。$A=\{x \mid x$ は整数の平方，$x\in U\}$，$B=\{x \mid x$ は 3 で割ると 1 余る数，$x\in U\}$，$C=\{x \mid x$ は素数$+2$，$x\in U\}$とするとき，整数 $A\cap B$ と $\overline{B}\cup C$ の要素の個数を求めよ。（川崎医大）

7 集合 A，B，C および $A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，$A\cap B\cap C$ に属する要素の個数がそれぞれ，40，50，50，18，20，15，3 であるとき，$A\cup B\cup C$ に属する要素の個数を求めよ。（東邦大）

8 実数全体の集合 U を全体集合とし，$n=1$，2，3 に対して U の部分集合 $A_n=\{x \mid x<2n\}\cup\{x \mid x>6n+1\}$ を考える。このとき，
$A_1\cup A_2\cup A_3$の U に関する補集合の要素のうち，最大数と最小数を求めよ。（湘南工科大）

Hints

1 $\overline{A}\cap B$ は，B に属するが A に属さないもの。

2 $100-n(2)-n(3)+n(6)$

3 $A\cap B$ に属する数は，$5\times 3=15$ ごとに並んでいる。

4 a 以外の 6 個の元のそれぞれが，含まれるか，含まれないかのいずれか。

5 具体的に A と B の要素を書き出してみよう。

6 5同様にそれぞれの集合の要素を書き出す。

7 例題 3 と円じベン図をかいて考える。

8 数直線を利用すると，見やすい。

5 順　列

☞解答は「解説と解答」p. 20

第5講座
数学Ⅰ

■この講座のねらい■　〔「数学αの完全整理」p. 36〜45 参照〕

1．順列の考え方と，記号について。

2．同じもののある順列。隣り合う順列。

3．円順列の考え方。

例題 1　6個の数字 0，1，2，3，4，5 がある。

(1)　これらすべてを1列に並べると，6けたの整数は何通りできるか。

(2)　6個の中から4個とって1列に並べると，4けたの整数は何通りできるか。

(3)　6個の中から3個とって1列に並べると，3の倍数はいくつできるか。

●解答への Approach

(1)　十万の位の数字は，1〜5の〔　　〕種類。

そのおのおのに対して，残りの5数の並び方は任意でよいから，求める数は，　〔　　〕×5!＝〔　　〕(通り)　……(答)

(2)　0に注意しないで，6数中4個をとり出して並べる方法の数は

$${}_6P_4 = 〔\quad\quad〕$$

この中で，はじめに0がくるものの並び方は，残り5数のうちから，百の位，十の位，一の位の数を選んで並べればよいので

$${}_5P_3 = 〔\quad\quad〕$$

求める数は，この差として，

〔　　〕−〔　　〕＝〔　　〕(通り)　……(答)

(3)　数字の和が3の倍数となる3数の選び方は

(0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)　……A群

(1，2，3)，(〔　　〕)，(〔　　〕)，(〔　　〕)　……B群

これらを並べると，A群はそれぞれ4通り，B群はそれぞれ〔　　〕通りの3けたの整数ができるので，

4×4＋4×〔　　〕＝〔　　〕(個)　……(答)

解法の Points

← 6個の数字をでたらめに並べても，最初に0がくるかもしれないから，6けたの数ができるとは限らない。

← (全体)−(4けたの整数でないもの)

← 3の倍数⟷数字の和が3の倍数
(0，1，2) を並べてできる整数は，102，120，201，210 の4個。

例題 2　8個の文字A，B，H，N，O，S，U，Uがある。

(1)　これら8文字を1列に並べると，何通りの並べ方があるか。

(2)　(1)の並べ方の中で，2個のUが隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(3)　8文字中，6文字をとって1列に並べると，何通りの並べ方があるか。

(4)　(1)のすべての並べ方を，辞書式にアルファベット順に並べたとすると，OUBUNSHAという並び方は何番目にくるか。

●解答へのApproach

(1)　8文字中，2文字だけが同じものであるから

$$\frac{8!}{2!}=〔\qquad〕\text{（通り）}$$ ……(答)

(2)　隣り合う場合を考えると，2個のUはまとめて1つの文字と考えてよい。結局，7個の文字を1列に並べる場合の数は　$7!=〔\qquad〕$

(1)の結果からこの数をひいて，

〔　　〕−〔　　〕=〔　　〕（通り）　……(答)

(3)　すべての文字が異なるとして，8個中6個とって並べる順列の数は

$${}_8P_6=〔\qquad〕$$

この中で，Uを含まない6文字の並べ方は　$6!=〔\qquad〕$　……①

よって，Uを含む(ただし2個のUは区別して考える)順列は

$${}_8P_6-6!=〔\qquad〕-〔\qquad〕=〔\qquad〕$$

実際は，Uに区別がないので，この数を2で割ったものが，本来のUを含む順列の数で，これに①の数を加えて

〔　　〕+〔　　〕=〔　　〕（通り）　……(答)

(4)　最初の文字がA，B，H，Nのとき，後にくる文字はそれぞれ任意で，その並び方は　$4\times(7!\div2!)=〔\qquad〕$

最初の文字がOのとき，2文字目がU以外の5文字ならば，並び方は

$$5\times(6!\div2!)=〔\qquad〕$$

最初の文字がOUのとき，3文字目がAなら，並び方は　5!

以下同様に考えれば，

OUBUNSHAという配列は　〔　　〕番目　……(答)

解法のPoints

←同じもののある順列

←(全体)−(隣り合う場合)

← $\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BU_2NSHU_1\\BU_1NSHU_2\end{array}\right\}\rightarrow\text{同じもの}\\\left.\begin{array}{l}BONASU_1\\BONASU_2\end{array}\right\}\rightarrow\text{同じもの}\end{array}\right.$

← OUBUNSHAよりも前に，いくつの配列があるかを考える。

例題 3　3個の白石と9個の黒石があり，白石どうし，黒石どうしは区別がないものとする。

(1)　この12個の石を1列に並べると，何通りの並べ方があるか。

(2)　この12個の石を円形に並べると，何通りの並べ方があるか。

(3)　この12個の石を円形につないで首飾りをつくると，何通りの首飾りができるか。

●解答へのApproach

(1)　12個のうち，白石が3個，黒石が9個あるから，同じもののある順列で

$$\frac{12!}{3!\,9!}=〔\qquad〕(通り)\qquad\cdots\cdots(答)$$

(2)　並べ方が一般の場合には，円形に並べられた1つの配列について，どこから切り離すかによって，12通りの1列の順列ができる。

しかし，回転して同じ配列となる場合には，そうではない。

白石が4個ごとに配列されたただ1通りの場合については，これを切り離しても，4通りの1列の順列しかできない。

よって，(1)の結果から4をひいたものが，一般の配列に対応する1列の順列の数で，それを12で割ったものが，一般の円順列の数である。

それに特殊な配列の1通りを加え，求める数は，

$$\frac{〔\qquad〕-4}{12}+1=〔\qquad〕(通り)\qquad\cdots\cdots(答).$$

(3)　首飾りにしたとき，裏返しにして一致するものは同じものと考える。だから，一般の場合には，円順列の場合に比べて，数は半分になる。

しかし，円順列で，対称軸をもつ配列は，その数は半分にできない。対称軸をもつとき，対称軸の両側に，同数の黒石と白石があるから，対称軸の両端は白石と黒石，対称軸の両側には，それぞれ1個の白石，4個の黒石がある。

1個の白石と4個の黒石の並べ方は5通り。

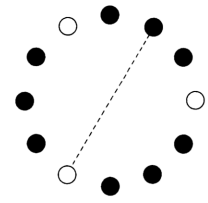
よって，(2)の結果から5をひいたものが，非対称な配列で，それらは，首飾りにすると，数は半分にしなくてはいけない。

以上の数に対称な5種を加え，求める数は

$$\frac{〔\qquad〕-5}{2}+5=〔\qquad〕(通り)\qquad\cdots\cdots(答)$$

解法のPoints

●特殊な配列



←上の配列では，点線が対称軸となっている。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 22）

1 6個の文字K，U，R，U，M，Eを1列に並べるとき，異なった並べ方は □ 通りである。

2 1が3個，2が3個，3が2個，合計8個の数字を1列に並べてできる8けたの整数は全部で □ 個，そのうち6の倍数は □ 個である。

3 7つの数字1，1，2，2，3，4，4を1列に並べるのに，奇数はすべて奇数番目にあるようにしたい。この並べ方は全部で □ 通りである。

4 3個の数字1，2，3を用いて6けたの整数をつくるとき，同じ数字を何回でも用いてよいことにすると全部で □ 個できるが，4回まで用いてよいことにすると □ 個となる。

5 7つの文字C，O，L，L，E，G，Eを全部使って1列に並べる。そのとき，Eが両端にくる並べ方は □ 通りあり，子音と母音が交互に並ぶ並べ方は全部で □ 通りある。

6 白球5個，赤球2個，黒球1個がある。この8個の球全部を，左から1列に並べるとき，次のような並べ方は，それぞれ何通りあるか。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1) 両端に白球がくる。
(2) 両端の球の色が異なる。
(3) 2個の赤球が隣り合う。
(4) 2個の赤球が隣り合うが，どの赤球も黒球と隣り合わない。
(5) 右端は黒球で，白球以外のどの2個の球も隣り合わない。
(6) 右端は白球で，白球以外のどの2個の球も隣り合わない。

7 1，2，3，4の4個の数字を並べかえて4けたの整数をつくる。このとき，異なる整数は全部で □ 通りでき，そのうち末尾が1となるものは □ 通りである。また，偶数となるものは □ 通りとなる。

8 互いに同形のガラス玉 g 個と，互いに同形のダイヤモンド d 個と，表裏のあるペンダント1個とを，まるくつないでネックレス状のものをつくる。ただし，ペンダントの両隣りはダイヤモンドにする。（$d \geqq 2$，$g \geqq 1$）

(1) 何通りのつくり方があるか。
(2) どの2個のダイヤモンドも隣り合わないことにしたら，何通りのつくり方があるか。

9 男子5人と女子3人を1列に並べるとき，女子3人が隣り合う並び方は □ 通りで，女子3人が隣り合わない並び方は □ 通りである。

Hints

1 6個のうち同じ文字が2個。

2 6の倍数とは，3の倍数でしかも2の倍数。

3 奇数と偶数の並べ方を別々に考え，その数をかけ合わせる。

4 4回まで同じ数でよいとは，全体から同じ数が6回のときと，5回のときを引く。

5 まず条件を先に考えよ。

6 (1) 両端以外を並べる。
(2) 両端の色で場合分け。
(3) 赤球は1個と考えよ。
(4)，(5)，(6)
はじめに白球だけ並べる。

7 末尾の数字から考える。

8 表裏のあるペンダントが1個だから，円順列ではなく，一列順列。

9 女子は先にまとめておくか，あとでバラバラに入れる。

6 組合せ

☞解答は「解説と解答」p. 24

第6講座
数学 I

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 46〜49 参照〕

1．組合せの考え方になれる。

2．組合せの応用問題がこなせるようになる。

3．図形への応用について知る。

例題 1 mathematics の 11 文字がある。この中から 5 文字を選んで 1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか。

●解答への Approach

11 文字のうちで，2 文字ずつあるのが m と a と t，他の h，e，i，c，s の 5 文字は 1 文字ずつしかない。

m，a，t のうち，2 種類を 2 文字ずつ使うとき，その選び方は

$${}_3C_2=3 \text{（通り）}$$

そのおのおのに対し，他の 1 文字の選び方は 6 文字中 1 文字を選んで

$${}_6C_1=6 \text{（通り）}$$

←ここまでが選び方。

そのおのおのに対し，5 文字の並べ方は，同じもののある順列の考えで，

$$\frac{5!}{2!\,2!}=\frac{120}{4}=30 \text{（通り）}$$

←これが並べ方。

以上の積として，この場合の求める数は

$${}_3C_2\times{}_6C_1\times\frac{5!}{2!\,2!}=3\times6\times30=〔\qquad\qquad〕$$

m，a，t のうち，1 種類の 2 文字を使うときと，5 文字がすべて異なるときの場合の数は

←第一の場合と同様に考える。

$${}_3C_1\times{}_7C_3\times\frac{5!}{2!}=〔\qquad\qquad〕$$

$${}_8P_5=〔\qquad\qquad〕$$

以上の和として

〔　　〕＋〔　　〕＋〔　　〕＝〔　　〕（通り）　……(答)

解法の Points

●まず選び方を考えて，そのあとで並べ方を考えればよい。

例題 2 次の各問いに答えよ。

(1) 区別のある6個の玉を，2個ずつA，B，Cの箱に入れる方法は何通りあるか。

(2) 区別のある6個の玉を，2個ずつ3つの組に分ける方法は何通りあるか。

(3) 区別のない6個の玉を，A，B，Cの箱に入れる方法は何通りあるか。ただし，1個も入らない箱があってもよいものとする。

(4) 区別のない6個の玉を，3つの組に分ける方法は何通りあるか。ただし，1個も含まない組があってもよいことにする。

●解答へのApproach

(1) まず，6個中2個を選んでAの箱に入れ，さらに残りの4個中2個を選んでBの箱に入れれば，残りの2個は自動的にCの箱に入るから，

$$ {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1} = 〔\quad〕\times〔\quad〕$$

$$ = 〔\quad〕（通り） \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1)で得られた数は，A，B，Cの3つの箱を区別した。この区別をなくすと，A，B，Cの並べかえ 3!=6（通り）のものが同じものとなり

$$ \frac{〔\quad〕}{3!} = 〔\quad〕（通り） \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) たとえば，Aに3個，Bに2個，Cに1個入れる入れ方を

○○○｜○○｜○

のように，6個の○と2個の｜を並べた配列で表す。左の｜の左側がAに入る玉で，2つの｜の中間がBに入る玉で，右の｜の右側がCに入る玉である。

このように，もとの問題は，6個の○と2個の｜を並べる問題となり，これはさらに異なる8個の場所から6か所を選んで○にすることだから，

$$ {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 〔\quad〕（通り） \qquad \cdots\cdots(答)$$

(4) この場合にはきまった公式がないから，自分で実験的に一覧表をつくるしかない。

(6, 0, 0)，(5, 1, 0)，(4, 2, 0)，(4, 1, 1)，……

と考えれば，合計で 〔　　〕（通り） ……(答)

解法のPoints

←(1)と(2)との問題の違いに注意。

←一般に，相異なる n 個から，重複をゆるして r 個とり出す組合せを**重複組合せ**といい，その数を ${}_nH_r$ で表す。

左の例同様に考えれば，

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

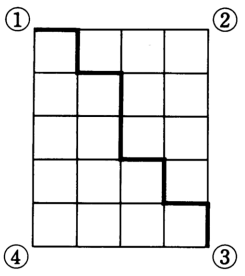
が成り立つ。

←(6, 0, 0)，(0, 6, 0)，(0, 0, 6)は同じものと考える。

例題 3　それぞれ正方形に区画されている図のような街路をAは①から③まで太線の道を歩く。Bは②から④まで，Cは③から①まで遠まわりしないように歩く。ただし，A，B，Cの3人は同時に①，②，③を出発し，歩く速さも等しいとする。

(1)　AとBが出会うようなBのとる道順は何通りあるか。

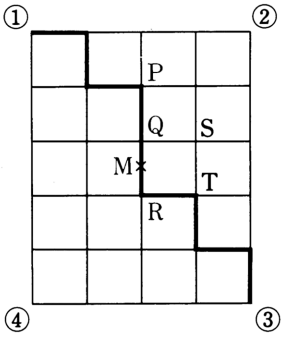
(2)　3人が同時にある地点を通過するようにB，Cが歩くとする。このとき，Bのとる道順は何通りあるか。



（大阪市大）

●解答へのApproach

(1)　Aは左から右へ，Bは右から左へ移動するから，出会うのは右図で線分PR上の点である。



はじめて出会う点がPのとき：

②からPに至る路数は ${}_3C_1$ と

Pから④に至る路数 ${}_{[\ \ ]}C_2$ を掛けて

${}_3C_1\times{}_{[\ \ ]}C_2=3\times[\quad\ ]=[\quad\ ]$

はじめて出会う点がQのとき：

BはSを通ってQへきたのであるから

②からSに至る路数 ${}_{[\ \ ]}C_1$ と

Qから④に至る路数 ${}_{[\ \ ]}C_2$ を掛けて

${}_{[\ \ ]}C_1\times{}_{[\ \ ]}C_2=3\times[\quad\ ]=[\quad\ ]$

はじめて出会う点がRのとき：

BはTを通ってRへきたのであるから

②からTに至る路数 ${}_{[\ \ ]}C_1$ と

Rから④に至る路数 ${}_{[\ \ ]}C_2$ を掛けて

${}_{[\ \ ]}C_1\times{}_{[\ \ ]}C_2=4\times[\quad\ ]=[\quad\ ]$

以上の3数を加えて，

$[\quad\ ]+[\quad\ ]+[\quad\ ]=[\quad\ ]$（通り）　……(答)

(2)　3人が同時に出会うには，(1)と同様に考えて，①，②の垂直二等分線上でしかも①，④の垂直二等分線上の点として，点Mが出会う点である。

BがMを通るには，②→Q→R→④ となればよいので，それぞれの路数を掛けて

${}_{[\ \ ]}C_2\times1\times{}_{[\ \ ]}C_2=[\quad\ ]\times1\times[\quad\ ]$

$=[\quad\ ]$（通り）　……(答)

解法のPoints

←等速で動くから，出会うのは①と②から等距離，すなわち垂直二等分線上。

←この解答は3種に分けたが，点Pを通る路数を $n(\mathrm{P})$ と書くことにすると

$n(\mathrm{P})+n(\mathrm{Q})+n(\mathrm{R})$
$-n(\mathrm{P,Q})-n(\mathrm{P,R})-n(\mathrm{Q,R})$
$+n(\mathrm{P,Q,R})$

と考えてもよい。

（本問では $n(\mathrm{P,Q,R})=n(\mathrm{P.R})$）

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 26）

1 男子 9 人，女子 5 人の中から 3 人の選手を選ぶものとする。3 人の中に男子が 2 人だけ入る選び方は何通りあるか。また男子からも女子からも少なくとも 1 人が選手となる選び方は何通りあるか。（日本大-農獣医）

2 m 本の平行線と n 本の平行線が交わってできるすべての平行四辺形の個数を求めよ。（国士舘大）

3 1 から 8 までの整数の中から異なる 3 数を選ぶとき，次のようなものはそれぞれ何通りあるか。

(1) 最大の数が 7 以下で，最小の数が 3 以上

(2) 最大の数が 7 以上

4 (1) どの 3 点も同一直線上にない 9 点が平面上にある。このうちから 3 点を結んでできる三角形の個数を求めよ。

(2) 三角形の各辺を 3 分割したときの 6 点と 3 頂点のうちから 3 点を結んでできる三角形の個数を求めよ。

5 12 冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1) 5 冊，4 冊，3 冊の 3 組に分ける。

(2) 4 冊ずつ 3 人の子供に分ける。

(3) 4 冊ずつ 3 組に分ける。

(4) 8 冊，2 冊，2 冊の 3 組に分ける。

6 algebra の 7 文字から 5 文字をとって 1 列に並べるとき，何通りの並べ方があるか。

7 男子 5 人，女子 4 人がいる。

(1) 2 組の男女のペアをつくる方法は何通りあるか。

(2) 4 組の男女のペアをつくる方法は何通りあるか。

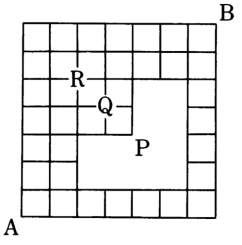
8 右図の道をもつ町がある。この町の西南端 A から東北端 B にいたる最短路で，

(1) P を通るものは何通りあるか。

(2) Q を通るものは何通りあるか。

(3) R を通るものは何通りあるか。

(4) 全部で何通りあるか。（福井医大）



Hints

1 男子を 2 人選べば，他の 1 人は女子。後半は，全体から，男子のみと女子のみの場合を除けばよい。

2 基本事項④参照。

3 (1)では 3 ～ 7 の中から選べばよい。

4 (1)は ${}_9C_3$，(2)は(1)から三角形でないものを除く。

5 例題 2 を参照せよ。

6 例題 1 を参照せよ。

7 まず，ペアに参加する男女を選び出そう。

8 例題 3 を参照せよ。

7 確率とその計算

☞解答は「解説と解答」p. 28

第7講座
数学Ⅰ

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 50〜58 参照〕

1．確率の考え方と数えあげの方法。

2．余事象の確率。

3．確率の加法定理。

例題 1 青玉7個，赤玉5個，白玉3個が袋の中に入れてある。元にもどさないで次々と4個の玉をとり出すとき，

(1) 同色の玉が2個ずつとり出される確率を求めよ。

(2) 同色の玉が3個以上とり出される確率を求めよ。 (信州大)

●解答への Approach

(1) 場合の総数は，相異なる15個の玉から4個とり出す方法の数として

$${}_{15}C_{[\quad]}=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15\cdot7\cdot13=[\qquad\qquad] \quad\cdots\cdots①$$

青2個と赤2個，赤2個と白2個，白2個と青2個をとり出す場合の数をそれぞれ加えて，

$${}_7C_2\times{}_5C_2+{}_5C_2\times{}_3C_2+{}_3C_2\times{}_7C_2=21\times[\quad]+10\times[\quad]+3\times[\quad]$$

$$=210+[\quad]+[\quad]=[\quad]$$

よって，求める確率は $\dfrac{[\quad]}{1365}=\dfrac{[\quad]}{455}$ ……(答)

(2) 同色の玉が3個以上とは，次のいずれかである。

青4個，青3個とその他1個；赤4個，赤3個とその他1個；白3個とその他1個。

この場合の数をそれぞれ加えて

$${}_7C_4+{}_7C_3\times8+{}_5C_4+{}_5C_3\times10+{}_3C_3\times12$$

$$=35+[\quad]\times8+5+[\quad]\times10+1\times12$$

$$=35+[\quad]+5+[\quad]+12=[\quad]$$

よって，求める確率は①の値で割って

$$\frac{[\quad]}{1365}=\frac{[\quad]}{455} \quad\cdots\cdots(答)$$

解法の Points

←確率では，すべてのものが異なると考えよ。

←同色の玉が2個ずつだから。

←青玉以外の玉の数は
5+3=8

例題 2　3個のサイコロを投げて，出た目を X，Y，Z で表し，$X \leqq Y \leqq Z$ とする。

(1)　$Y=\frac{1}{2}(X+Z)$ となる確率を求めよ。

(2)　$3 \leqq Y \leqq 4$ となる確率を求めよ。　（福井医大）

●解答への Approach

(1)　3個のサイコロを区別して考えるから，これを投げたとき，目の現れ方の総数は

$$6^3=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots◎$$

$2Y=X+Z \Rightarrow Y-X=Z-Y$　で，差が等しい。

差が0のとき，1 1 1，2 2 2，…，6 6 6の〔　　〕通り。　……①

差が1のとき，1 2 3，2 3 4，3 4 5，4 5 6の〔　　〕通りで，

出方の順序を変えれば，それぞれ3!倍されるから

$$〔\quad〕\times 6=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots②$$

差が2のとき，1 3 5と2 4 6　の2通り。これも3!倍して

$$2\times 6=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots③$$

よって，求める確率は，分子が①，②，③の和となり

$$\frac{6+〔\quad〕+〔\quad〕}{6^3}=\frac{1+〔\quad〕+〔\quad〕}{6^2}=\frac{〔\quad〕}{36}\qquad\cdots\cdots（答）$$

(2)　$3 \leqq Y \leqq 4$ だから，まず $Y=3$ のときを考える。

$X=Y=Z(=3)$ のとき，明らかに　1通り。　……④

$X<Y=Z(=3)$ のとき，X は1または2

出方の順序はそれぞれ3通りあるから

$$2\times 3=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots⑤$$

$X=Y(=3)<Z$ のとき，Z は4，5，6のいずれか。

これも順序を考えるとそれぞれ3通りで

$$〔\quad〕\times 3=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots⑥$$

$X<Y(=3)<Z$ のとき，X は2通り，Z は3通りあり，順序を考えればそれぞれの3!通りあるから

$$2\times 3\times〔\quad〕=〔\quad〕（通り）\qquad\cdots\cdots⑦$$

$Y=4$ のときも同様に考えて，場合の数はまったく等しい。

以上より，求める確率は，分母が◎，分子が④，⑤，⑥，⑦の和の2倍で

$$\frac{2(1+〔\quad〕+〔\quad〕+〔\quad〕)}{6^3}$$

$$=\frac{2\times〔\quad〕}{6^3}=\frac{〔\quad〕}{3^3}=\frac{〔\quad〕}{27}\qquad\cdots\cdots（答）$$

解法の Points

← 1 1 1は，サイコロの目の出た順序であって百十一ではない。

← $3 \leqq Y \leqq 4$ とは，Y は3または4

← 1 3 3の並べ方は3通り。

← X は1または2，Z は4または5または6

例題 3 次の問いに答えよ。

(1) 20本中に1本だけ当たりくじが入っている。このくじをはじめにAが1本引き，次にBが1本引くとき，

(ア) Aが引いたくじが当たりくじである確率を求めよ。

(イ) Bが引いたくじが当たりくじである確率を求めよ。

(2) 20本中 n 本の当たりくじが入っているくじがある。このくじを続けて2本引くとき，そのうちの少なくとも1本が当たりくじである確率は $\frac{17}{38}$ である。n を求めよ。 (大妻女大)

●解答へのApproach

(1) 場合の総数は，異なる20本から2本選んで，ABの順に並べる順列として考えれば，

$${}_{20}P_2=20\times[\quad\quad]=[\quad\quad\quad]$$

(ア) 並べた2本が，当たり，はずれと並べばよい。

当たりくじは1本，はずれくじは19本あるから，並べ方は

$$1\times19=[\quad\quad]$$

よって，この確率は $\frac{19}{[\quad\quad]}=\frac{1}{[\quad\quad]}$ ……(答)

(イ) 並べた2本が，はずれ，当たりと並べばよい。

考え方，計算法は(ア)とまったく同じで，確率は

$\frac{1}{[\quad\quad]}$ ……(答)

(2) 順序はどうでもよいので，場合の総数は，20本から2本選ぶ組合せとして

$${}_{20}C_2=[\quad\quad\quad]\ (\text{通り})$$

余事象で，2本ともはずれの場合の数は，はずれくじが $(20-n)$ 本あるから，${}_{20-n}C_2$ 通り。よって題意より

$$1-\frac{{}_{20-n}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{17}{38},\quad \frac{{}_{20-n}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{[\quad\quad]}{38}$$

$$\frac{(20-n)(19-n)}{20\times19}=\frac{[\quad\quad]}{38},\quad (20-n)(19-n)=[\quad\quad\quad]$$

$$380-39n+n^2=[\quad\quad\quad]$$

$$n^2-39n+[\quad\quad\quad]=(n-[\quad\quad])(n-34)=0$$

$0\leqq n\leqq20$ だから，　$n=[\quad\quad]$ ……(答)

解法のPoints

← 1本引くことだけを考え，単純に $\frac{1}{20}$ としてもよい。

← くじの原理「くじに当たる確率は何番目に引いても同じ。」

← **「少なくとも」**という言葉を見たら**余事象**で考えよ。

← 余事象を使わないなら $\frac{{}_nC_2+(20-n)n}{{}_{20}C_2}=\frac{17}{38}$ としても解ける。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 30）

1 3個のサイコロを投げるとき，出た目の数の積が36となる確率を，既約分数で表せ。（神奈川大）

2 3個のサイコロを投げたとき，出た目の最大数が4以下である確率を求めよ。また，出た目の最大数が4である確率を求めよ。（福岡大）

3 3個のサイコロを同時に投げるとき，出た目の和が5以上である確率はいくらか。（防衛医大）

4 1個のサイコロを3回投げて出た目を a，b，c とする。積 abc が5の倍数である確率を既約分数で表せ。（神奈川大）

5 1，2，3，4，5から相異なる3つの数字をとって3桁の整数をつくるとき，340より大きい奇数となる確率を求めよ。（東京医大）

6 1000から9999までの4けたの整数の中から，その1つを無作為に選んだとき，同じ数字が2つ以上現れる確率を求めよ。（立教大）

7 白球7個，赤球3個の入った箱から，6球を同時にとり出したとき，白球の個数が赤球の個数よりも多い確率を求めよ。（日本大-理工）

8 1から n までの数字のかいてあるカードがそれぞれ4枚ずつ，合計 $4n$ 枚あるとする。これらをよく切っておいて5枚を同時にとり出すとき，ツーペアになっている確率を求めよ。（ただし $n \geqq 3$ とする。）ここでツーペアというのは「1，1，2，2，3」のように同じ数からなる組（ペア）が2組と別の1つの数からなる組合せのことをいう。

Hints

1 1～6の3数を掛けて，36になる場合の数は？

2 最大数が4とは，最大数が4以下であるが，3以下ではないこと。

3 余事象で考えよ。

4 abc が5の倍数とは，少なくとも1つは5。

5 百位の数字が，3，4，5のそれぞれの場合に分けて考えよ。

6 余事象で考えよ。

7 白球，赤球の個数は，6と0，5と6，4と2のいずれか。

8 場合の総数は ${}_{4n}C_5$ である。まず，ツーペアに使われる数を決めよう。

8 独立試行と期待値

☞解答は「解説と解答」p. 32

第8講座
数学Ⅰ

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 59〜65 参照〕

1．独立な試行の意味と積の法則を知る。

2．独立試行の定理を理解する。

3．期待値を学ぶ。

例題 1 1つのサイコロを無作為に投げるとき，次の確率を求めよ。確率は小数で表示し，小数第2位まで求めよ。

(1) 1回の試行で，3の倍数の目が出る確率 p_1

(2) 5回の反復試行で，3の倍数の目が2回出る確率 p_2

(3) 5回の反復試行で，3の倍数の目が少なくとも1回出る確率 p_3 （明星大）

●解答へのApproach

(1) サイコロの目6個のうちで，3の倍数は　3と〔　　〕の2個

よって，求める確率は　$p_1=\dfrac{〔\quad〕}{6}=\dfrac{1}{〔\quad〕}=0.33$ ……(答)

(2) 1回の試行で3の倍数の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ だから，独立試行の定理により，

$$p_2={}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{2^3}{3^{[\quad]}}=\frac{5\times2^{[\quad]}}{3^5}=\frac{〔\quad〕}{243}=〔\qquad〕$$ ……(答)

(3) 「3つの倍数が少なくとも1回出る」ことの余事象は，

「3の倍数が5回とも出ない」ことである。

3の倍数以外の目が5回続けて出る確率は

$$\left(\frac{〔\quad〕}{3}\right)^5$$

よって，求める確率は

$$1-\left(\frac{〔\quad〕}{3}\right)^5=\frac{243-〔\quad〕}{243}=\frac{〔\quad〕}{243}=〔\qquad〕$$ ……(答)

解法のPoints

←小数表示に注意。

← $1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

←小数は第2位まで，四捨五入ではなくて切り捨て。

←余事象を使わなければ，

$$p_3={}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5+{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+{}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

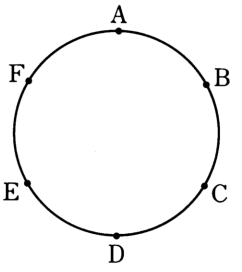
例題 2 円周を6等分する点を時計まわりの順にA，B，C，D，E，Fとし，点Aを出発点として小石をおく。サイコロをふり，偶数の目が出たときは2，奇数の目が出たときは1だけ小石を時計まわりに分点上進めるゲームを続け，最初に点Aにちょうどもどったときを上がりとする。

(1) ちょうど1周して上がる確率を求めよ。

(2) ちょうど2周して上がる確率を求めよ。 (北大-理系)

●解答へのApproach

(1) 1周でAへもどるためには，次のいずれかが起こればよい。



3回中，3回ともに偶数。
4回中，2回が偶数で奇数が〔　　〕回。
5回中，〔　　〕回が偶数で奇数が〔　　〕回。
6回奇数が続けて出る。

以上はすべて排反だから，求める確率は独立試行の定理から

$$ {}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{[\quad]}+\left(\frac{1}{2}\right)^6 $$

$$ =\frac{1}{8}+\frac{[\quad]}{16}+\frac{[\quad]}{32}+\frac{1}{64}=\frac{8+24+[\quad]+1}{64} $$

$$ =\frac{[\quad]}{64} $$ ……(答)

(2) ちょうど2周でAへもどるには，Fで偶数が出てBへ行き，BからAへ行けばよい。AからFまで5コマ進む場合は次のいずれか。

3回中，2回が偶数で奇数が1回。
4回中，1回が偶数で奇数が〔　　〕回。
5回奇数が続けて出る。

このことの起こる確率は，(1)同様に独立試行の定理を使って

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{[\quad]}+\left(\frac{1}{2}\right)^5 $$

$$ =\frac{3}{8}+\frac{4}{[\quad]}+\frac{1}{32}=\frac{12+[\quad]+1}{32}=\frac{[\quad]}{32} $$

BからAへ行くのも5マス進む確率だから，A→F $\underset{(偶数)}{\rightarrow}$ B→Aの確率は

$$ \frac{21}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}=\frac{[\quad]}{2048} $$ ……(答)

解法のPoints

←まず，場合を分類する。

←AからA1周してAをとびこえてBまで行く確率は，(1)が起こらない確率だから

$$ 1-\frac{43}{64}=\frac{21}{64} $$

これに$\frac{21}{32}$を掛ければ，(2)の確率が得られる。

例題 3 サイコロを投げることをくり返し，出た目の和が 4 以上となったら終わることにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 1 回投げて終わる確率を求めよ。

(2) 2 回投げて終わる確率を求めよ。

(3) 終わるまでに投げる回数の期待値を求めよ。 (新潟大)

●解答への Approach

(1) 1 から 6 までの目の中で，4，5，6 のいずれかが出ればよいから

$$p_1=\frac{[\quad]}{6}=\frac{1}{[\quad]}$$ ……(答)

(2) 1 回目に 1 が出て，2 回目に 3 以上が出る
1 回目に 2 が出て，2 回目に 2 以上が出る
1 回目に 3 が出る
のいずれか。

よって，求める確率は

$$p_2=\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{[\quad]}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4+[\quad]+6}{6^2}=\frac{[\quad]}{36}=\frac{5}{[\quad]}$$

……(答)

(3) 3 回投げて終わるのは

1 回目に 1，2 回目も 1，3 回目は 2 以上
1 回目に 1，2 回目は 2
1 回目に 2，2 回目に 1
のいずれかで，この確率は

$$p_3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{[\quad]}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{[\quad]}{6}=\frac{[\quad]+6+[\quad]}{6^3}=\frac{[\quad]}{216}$$

4 回投げて終わるのは，3 回続けて 1，1，1 と出るときだけだから

その確率は $p_4=\frac{1}{6^{[\ ]}}=\frac{1}{[\quad]}$

以上より，求める期待値は

$$p_1+2p_2+3p_3+4p_4=\frac{1}{[\quad]}+2\times\frac{5}{[\quad]}+3\times\frac{17}{[\quad]}+4\times\frac{1}{[\quad]}$$

$$=\frac{108+[\quad]+[\quad]+4}{216}=\frac{[\quad]}{216}$$ ……(答)

解法の Points

← 1 回で終わらず，2 回で(1，1)，(1，2)，(2，1)以外の目が出ればよいから

$$1-\frac{1}{2}-\frac{3}{6^2}$$

を計算してもよい。

← $p_1+p_2+p_3+p_4=1$ を確かめよう。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 34）

1 サイコロを6回投げるとき，同じ目が6回続けて出る確率，1から6までの目がちょうど1回ずつ出る確率，および1の目と2の目がそれぞれ3回ずつ出る確率を求めよ。 （関西学院大）

2 2個のサイコロを同時にふり，出た目の和を t とする。$t=9$ が n 回続けて出るか，または，$t \neq 9$ が1回でも出たとき終了となるゲームに対し，k 回（$k \leqq n$）で終わる確率 p_k を求めよ。 （埼玉大）

3 ○×式の問題が10題ある。○印と×印をでたらめにつけるとき，少なくとも3題が正解となる確率を求めよ。 （神奈川大）

4 何枚かの硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数が1枚以下である確率が $\frac{1}{10}$ より大きくならないようにしたい。何枚投げればよいか。 （弘前大）

5 ある競技で，2人がゲームを数回重ね，先に3回勝ったほうを優勝とするという。この競技でA，Bが対戦した場合，各回のゲームでAが勝つ確率が p であるとき，Aが優勝する確率を p で表せ。 （日本福祉大）

6 3チームA, B, Cが1日に総当たり3試合を行って2勝したチームを優勝とし，優勝チームが出るまで毎日くり返す。ただし，AがBに勝つ確率，BがCに勝つ確率，CがAに勝つ確率は，いずれも p（$0<p<1$）であり，引き分けはないものとする。第 n 日目に優勝チームが決まる確率 p_n を求めよ。 （名大-理系）

7 4枚の100円硬貨を同時に投げたとき，表が出た100円硬貨をもらえるとする。もらえる金額の期待値を求めよ。 （岩手医大）

8 1から5までの数字を記入した5枚のカードがある。この中から無作為に1枚抜きとり，元にもどさずにまた1枚抜きとる。このときカードの数字の和の期待値を求めよ。 （神奈川大）

Hints

1 場合の総数は 6^3 通りで，3種の確率を計算する。

2 まず，2個のサイコロをふり，目の和が9になる確率を求めよ。

3 余事象を考えよ。

4 n 枚として確率を計算し，$n=1, 2, 3, \cdots$ と順に計算せよ。

5 Aが負ける回数で分類して考えよ。

6 3すくみになる確率をまず求めよ。
$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

7 それぞれの場合の確率は独立試行の定理で。

8 2枚同時にとり出しても同じことである。

9 三角比の性質

☞解答は「解説と解答」p. 36

第 9 講座
数学 I

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 66〜74 参照〕

1．三角比の意味と 30°，45°，60° のときの値。

2．三角比相互の関係。

3．三角比についての基本的な計算。

例題 1 次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ で $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。 (久留米大)

(2) 次の値を求めよ。

(i) $\tan 135^\circ-\sin 90^\circ+\cos 120^\circ$ (ii) $\dfrac{\tan 120^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 120^\circ\tan 60^\circ}$

●解答への Approach

(1) 第 2 象限では $\cos\theta<0$ に着目すれば

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{\boxed{}}\right)^2}=-\sqrt{\frac{\boxed{}^2-3^2}{5^2}}=-\sqrt{\frac{\boxed{}}{25}}=-\frac{\boxed{}}{5}$$

……(答)

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\boxed{}}{5}\div\left(-\frac{\boxed{}}{5}\right)=-\frac{\boxed{}}{4}$$

……(答)

(2) (i) $\tan 135^\circ-\sin 90^\circ+\cos 120^\circ$

$$=\tan(180^\circ-\boxed{}^\circ)-\sin 90^\circ+\cos(180^\circ-\boxed{}^\circ)$$

$$=-\tan\boxed{}^\circ-\sin 90^\circ-\cos\boxed{}^\circ$$

$$=-\boxed{}-\boxed{}-\frac{1}{\boxed{}}=-\frac{\boxed{}}{2}$$

……(答)

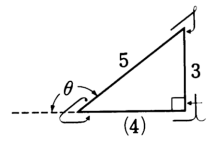
(ii) $$\frac{\tan 120^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 120^\circ\tan 60^\circ}=\frac{\tan(180^\circ-\boxed{}^\circ)-\tan 60^\circ}{1+\tan(180^\circ-\boxed{}^\circ)\tan 60^\circ}$$

$$=\frac{-\tan\boxed{}^\circ-\tan 60^\circ}{1-\tan\boxed{}^\circ\tan 60^\circ}=\frac{-\boxed{}\tan 60^\circ}{1-\tan^2\boxed{}^\circ}=\frac{-2\sqrt{\boxed{}}}{1-\boxed{}}=\sqrt{\boxed{}}$$

……(答)

解法の Points

←



上図のように考えて，後で符号を考えれば簡単。

← $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$
$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

例題 2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\tan\theta = 3$ のとき，次の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\cos\theta + 5\sin\theta$　　(2) $\cos^6\theta + \sin^6\theta$

(3) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta}$　　(4) $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

●解答への Approach

(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ と，$\tan\theta > 0$ から，　$0^\circ < \theta < 90^\circ$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (\quad)^2 = (\quad)$　　よって，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{(\quad)}}$

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = (\quad) \times \dfrac{1}{\sqrt{(\quad)}} = \dfrac{(\quad)}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta + 5\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} + \dfrac{(\quad)}{\sqrt{10}} = \dfrac{(\quad)}{\sqrt{10}} = \dfrac{(\quad)}{\sqrt{10}} \times \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{(\quad)\sqrt{10}}{5}$

……(答)

(2) $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{\cos^6\theta + \sin^6\theta}{1} = \dfrac{\cos^6\theta + \sin^6\theta}{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^3}$

分母と分子を $\cos^{(\quad)}\theta$ で割って

与式 $= \dfrac{1+\tan^{(\quad)}\theta}{(1+\tan^{(\quad)}\theta)^3} = \dfrac{1+3^{(\quad)}}{(1+3^{(\quad)})^3} = \dfrac{1+(\quad)}{(\quad)^3} = \dfrac{(\quad)}{100}$　……(答)

(3) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta} = \dfrac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \dfrac{2}{1-(\quad)}$

$= \dfrac{2}{(\quad)} = 2(1+\tan^{(\quad)}\theta) = 2(1+(\quad)) = (\quad)$　……(答)

(4) $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

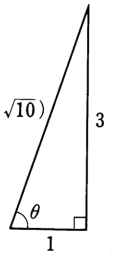
$= \dfrac{((\quad))^2}{(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)} = \dfrac{(\quad)}{\cos\theta - \sin\theta}$

ここで分母と分子を $\cos\theta$ で割って

与式 $= \dfrac{\tan\theta + (\quad)}{1 - \tan\theta} = \dfrac{(\quad)+1}{1-(\quad)} = (\quad)$　……(答)

解法の Points

←右の図で考えてもよい。



←以下，sin と cos の値を代入してもよいが，別の方法で説明する。

← $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

例題 3 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，次の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$

(3) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$　　(4) $\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}$

●解答への Approach

(1) 等式 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{〔\quad〕}$,　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{〔\quad〕}$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{〔\quad〕}-1=-\frac{3}{〔\quad〕}$　だから，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{〔\quad〕}$

……(答)

(2) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-〔\quad〕\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=〔\quad〕-〔\quad〕(\sin\theta\cos\theta)^2=1-〔\quad〕\times\left(-\frac{3}{〔\quad〕}\right)^2$

$=1-\frac{9}{〔\quad〕}=\frac{〔\quad〕}{32}$　……(答)

(3) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{〔\quad〕}}=-\frac{〔\quad〕}{6}=-\frac{〔\quad〕}{3}$　……(答)

(4) $\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}=\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}+\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}=\frac{\sin^6\theta+\cos^{〔\ \ 〕}\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}$

$\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3-〔\quad〕\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^3}$

$=\frac{1-〔\quad〕\left(-\frac{3}{〔\quad〕}\right)^2\times1}{\left(-\frac{3}{〔\quad〕}\right)^3}=\frac{1-\frac{27}{〔\quad〕}}{-\frac{27}{〔\quad〕}}=\frac{\frac{37}{〔\quad〕}}{-\frac{27}{〔\quad〕}}$

$=-\frac{37\times〔\quad〕}{27\times64}=-\frac{〔\quad〕}{27}$　……(答)

解法の Points

← $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

←(1)の結果を使う。

← $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

← a^3+b^3
$=(a+b)^3-3ab(a+b)$
(→第 13 講座)

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 38）

1 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

（聖徳学園岐阜教育大）

2 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$|\sin\theta - \cos\theta|$ の値を求めよ。（日本工大）

3 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{4}$ のとき，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ。（鹿児島大）

4 $\sin\theta + \cos\theta = a$ のとき，次の式を a で表せ。

(1) $\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}$　　(2) $\dfrac{\tan^3\theta\cos\theta + 2\tan^2\theta\cos\theta + \sin\theta}{1+\tan^3\theta}$

ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。（国士舘大）

5 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ のとき，

$$\sin\theta\cos\theta,\ \sin^3\theta - \cos^3\theta$$

の値をそれぞれ求めよ。（武庫川女大）

6 $\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{8}$ で，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\sin\theta + \cos\theta$ の値を求めよ。

（久留米工大）

7 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{1+\cos\theta-\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta} + \dfrac{1+\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta-\sin\theta}$

を簡単にせよ。（広島経大）

8 方程式　$x^2 + 2kx + 2k(k-1) = 0$ の解が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ であるとき，k の値を求めよ。また，次の分数式の値を求めよ。

$$\frac{1}{2+\sin\theta} + \frac{1}{2+\cos\theta}$$

（福岡大）

Hints

1 まず $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を使うか，または図で考える。

2 $(\sin\theta - \cos\theta)^2$ の値をまず求めよ。

3 例題3にならえ。
$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

4 (2)では，分母と分子に $\cos^3\theta$ を掛ける。

5 これも，与式の両辺を2乗することから始まる。

6 $\sin\theta + \cos\theta = a$ とおけ。

7 まず，この分数式を簡単にせよ。

8 $x^2 + px + q = 0$ の解が α, β なら，この方程式は
$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ と表せるから，　$p = -(\alpha+\beta)$，$q = \alpha\beta$
（→第36講座）

10 三角比と 2 次関数

☞解答は「解説と解答」p. 40

第10講座
数学 I

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 79〜81 参照〕

1. 三角比の値の変化と最大・最小。
2. 三角方程式の解き方。
3. 三角不等式の解き方。

例題 1 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とするとき k を定数として，$\sin^2\theta+\cos\theta+k$ が最大となる θ の値を求めよ。

また，この最大値が $\frac{1}{4}$ となるような k の値を求めよ。 （東京国際大）

●解答への Approach

$$\sin^2\theta+\cos\theta+k=(\boxed{}-\cos^2\theta)+\cos\theta+k$$

$$=-\cos^2\theta+\cos\theta+\boxed{}+k$$

$$=-\left(\cos^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{\boxed{}}-\frac{1}{\boxed{}}\right)+1+k$$

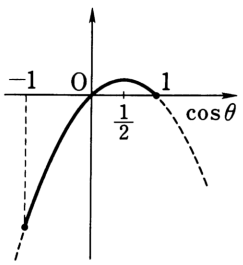
$$=-\left(\cos\theta-\frac{1}{\boxed{}}\right)^2+\frac{\boxed{}}{4}+k$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta$ の変域は

$$\boxed{} \leqq \cos\theta \leqq 1$$

よって，$\sin^2\theta+\cos\theta+k$ が最大となるとき，

$$\cos\theta=\frac{1}{\boxed{}},\quad \theta=\boxed{}^\circ \quad \cdots\cdots(答)$$



上の結果から，この関数の最大値は

$$\frac{\boxed{}}{4}+k$$

これが $\frac{1}{4}$ に等しいとき，

$$\frac{\boxed{}}{4}+k=\frac{1}{4} \text{ から，}\quad k=\boxed{} \quad \cdots\cdots(答)$$

解法の Points

← 2 次関数の標準形への変形。

← $\frac{1}{2}$ がこの範囲に含まれていることに注意。

例題 2 次の問いに答えよ。

(1) $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき，$\dfrac{1}{4}+\cos x-\sin^2 x=0$ を解け。 (福岡大)

(2) x，yの連立方程式 $\begin{cases} 13\cos x+\sqrt{3}\sin x=y\cos x \\ \sqrt{3}\cos x+11\sin x=y\sin x \end{cases}$ を解け。

ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。 (中央大)

●解答への Approach

(1) $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ だから

$$\frac{1}{4}+\cos x-(\boxed{}-\cos^2 x)=0,\quad \cos^2 x+\cos x-\frac{\boxed{}}{4}=0$$

$$4\cos^2 x+4\cos x-\boxed{}=(2\cos x+3)(\boxed{}\cos x-1)=0$$

$2\cos x+3>0$ だから　$\boxed{}\cos x-\boxed{}=0$

$\cos x=\dfrac{1}{\boxed{}}$ から　$x=\boxed{}^\circ$ ……(答)

(2) 2つの式からそれぞれ y を求めて等しいとおくと

$$y=\frac{13\cos x+\sqrt{3}\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}\cos x+\boxed{}\sin x}{\boxed{}} \quad \cdots\cdots◎$$

$$\boxed{}(13\cos x+\sqrt{3}\sin x)=\cos x(\sqrt{3}\cos x+\boxed{}\sin x)$$

$$13\sin x\cos x+\boxed{}\sin^2 x=\sqrt{3}\cos^2 x+\boxed{}\sin x\cos x$$

よって，$\sqrt{3}\sin^2 x+\boxed{}\sin x\cos x-\boxed{}\cos^2 x=0$

$$(\sqrt{3}\sin x-\boxed{})(\sin x+\boxed{})=0$$

$\sqrt{3}\sin x=\cos x$ のとき：　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\boxed{}}$

これより　$x=\boxed{}^\circ$

$\sin x=-\boxed{}$ のとき：　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\boxed{}$

これより　$x=\boxed{}^\circ$

◎より　$y=\boxed{}+\sqrt{3}\tan x$

$\tan x=\dfrac{1}{\boxed{}}$ のとき：　$y=\boxed{}$

$\tan x=\boxed{}$ のとき：　$y=\boxed{}$

以上より，

$$\begin{cases} x=30^\circ \\ y=\boxed{} \end{cases} \quad または \quad \begin{cases} x=\boxed{}^\circ \\ y=\boxed{} \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

解法の Points

←ここで両辺を 4 倍。

←$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ から
$1 \leqq 2\cos x+3 \leqq 5$

←これは因数分解できる。

←積が 0 のとき，いずれかのかっこは 0

←解が 2 組出ることに注意しよう。

例題 3 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{2}{3}\cos^2\theta \geqq 1-\cos(90^\circ-\theta)$ （専修大）

(2) $2\cos\theta+3\sqrt{3}\tan\theta > \dfrac{5\tan\theta}{\sin\theta}$ （阪南大）

●解答への Approach

(1) $\dfrac{2}{3}\cos^2\theta \geqq 1-\cos(90^\circ-\theta)$ から　$\dfrac{2}{3}(1-〔\quad\quad〕) \geqq 1-\sin\theta$

両辺を 3 倍して

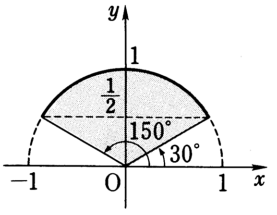
$$2-〔\quad〕\sin^2\theta \geqq 〔\quad〕-3\sin\theta$$

右辺に集めて

$$0 \geqq 〔\quad〕\sin^2\theta-〔\quad〕\sin\theta+1$$

$$0 \geqq (2\sin\theta-1)(〔\quad\quad〕-1)$$

ゆえに，$\dfrac{1}{〔\quad〕} \leqq \sin\theta \leqq 〔\quad〕$



ここで，右図より θ の範囲は

$$〔\quad〕^\circ \leqq \theta \leqq 〔\quad\quad〕^\circ \quad \cdots\cdots(答)$$

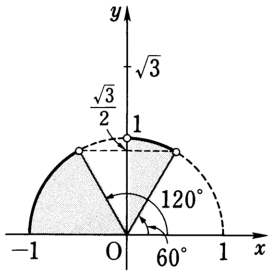
(2) $\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}=\tan\theta\div\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\div\sin\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ だから，原不等式は

$$2\cos\theta+3\sqrt{3}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{5}{\cos\theta}=\frac{2\cos^2\theta+3\sqrt{3}\sin\theta-〔\quad〕}{\cos\theta}>0 \text{ から}$$

$$\frac{2(1-\sin^2\theta)+〔\quad〕\sin\theta-5}{\cos\theta}>0$$

$$\frac{2\sin^2\theta-〔\quad〕\sin\theta+〔\quad〕}{\cos\theta}<0 \text{ から}$$

$$\frac{(2\sin\theta-\sqrt{3})(\sin\theta-〔\quad〕)}{\cos\theta}<0$$



分子<0　かつ　分母>0 のとき：

$$\frac{〔\quad〕}{2}<\sin\theta<〔\quad〕,\quad 0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$$

分子>0 かつ　分母<0 のとき：

$$\sin\theta<\frac{〔\quad〕}{2} \text{ または } 〔\quad〕<\sin\theta,\quad 90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$$

よって，右の図を参考にして

$$60^\circ<\theta<90^\circ,\ 〔\quad\quad〕^\circ<\theta\leqq 180^\circ \quad \cdots\cdots(答)$$

解法の Points

← $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$
$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

← $\sin\theta$ に関する 2 次不等式。

←図で考える方法を理解しよう。

← $\cos\theta$ の符号は未定だから，分母ははずせない。

← $\cos\theta>0 \rightleftarrows 0^\circ\leqq\theta<90^\circ$
$\cos\theta<0 \rightleftarrows 90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 42）

1 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2-\cos\theta-\sin^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。（龍谷大）

2 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ で，関数 $f(x)=a\cos x+b$ の最大値が 4，最小値が -2 のとき，a，b の値を求めよ。（東京学芸大）

3 $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき，$y=4\cos^2 x+2\sin x+\dfrac{5}{4}$ の最大値を求めよ。また，そのときの $\sin x$ の値を求めよ。

4 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos^2\theta+\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{5}{4}$ をみたす角 θ を求めよ。（藤田学園大）

5 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta-\tan\theta}{1+\cos\theta}$ を $x=\sin\theta$ の分数式で表せ。
また，$f(\theta)=8$ をみたす θ を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲内で求めよ。（追手門学院大）

6 方程式 $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=2(1+2\cos x)$ の解を，
$0^\circ \leqq x < 90^\circ$ の範囲で求めよ。（東洋大）

7 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2 x+3\cos x<0$ を解け。

8 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$|\sin\theta|>|\cos\theta|$ をみたす θ の範囲を求めよ。（岐阜女大）

Hints

1 $\cos\theta$ についての 2 次関数と考えよ。

2 $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

3 $\sin x$ についての 2 次関数と考えよ。

4 すべて $\sin\theta$ の式で書き表す。

5 まずこの分数式を，通分して加え，簡単にせよ。

6 左辺は，通分して加えると簡単になる。

7 例題 3 にならえ。

8 第 1 象限と第 2 象限に分けて考えるか，または最初から両辺を 2 乗する。

11 三角比と三角形

☞解答は「解説と解答」p. 44

第11講座
数学 I

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 75〜86 参照〕

1．正弦定理とその応用。

2．余弦定理とその応用。

3．三角形の面積の公式。

例題 1

半径 1 の円に内接する四角形 ABCD において，

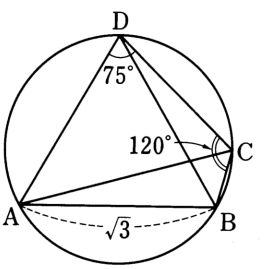
$$AB=\sqrt{3},\ \angle ADC=75^\circ,\ \angle BCD=120^\circ$$

であるものとする。次のものをそれぞれ求めよ。

(1) $\angle ADB$，$\angle DAB$，$\angle DAC$　　(2) DC，AC

ただし，$\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

●解答への Approach



(1) 正弦定理から

$$2\times 1=\frac{\sqrt{3}}{\sin\angle ADB},\qquad \sin\angle ADB=\frac{\sqrt{3}}{〔\quad〕}$$

よって，　$\angle ADB=60^\circ$　……(答)

$\angle DAB=180^\circ-\angle BCD=〔\quad〕^\circ$　……(答)

以上より△ ABD は正三角形。

$\angle DAC=\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD$

$=(180^\circ-\angle ADC)-\angle ABD$

$=180^\circ-〔\quad〕^\circ-〔\quad〕^\circ=〔\quad〕^\circ$　……(答)

(2) $DC=2\times 1\sin\angle DAC=2\times\sin〔\quad〕^\circ=2\times\dfrac{〔\quad〕}{2}=〔\quad〕$　……(答)

また，$\sin\angle ADC=\sin〔\quad〕^\circ=\cos〔\quad〕^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であるから

$AC=2\times 1\sin\angle ADC$

$=2\times\dfrac{\sqrt{〔\quad〕}+\sqrt{〔\quad〕}}{4}=\dfrac{\sqrt{〔\quad〕}+\sqrt{〔\quad〕}}{2}$　……(答)

解法の Points

← $2R=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$

←円に内接する四角形で，対角の和は 180°

←円周角は相等しい。

← $2R=\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}$

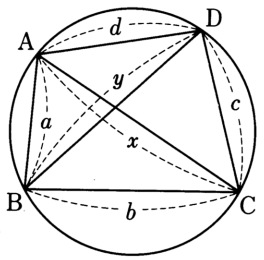
例題 2 4辺の長さが a, b, c, d である四角形 ABCD が円に内接している。対角線 AC, BD の長さを x, y とするとき,

(1) ∠B と∠D の関係式をかけ。

(2) △ABC と△ADC に余弦定理を適用して, x を a, b, c, d で表せ。

(3) xy を a, b, c, d で表せ。 (日本歯大)

●解答への Approach



(1) 円に内接する四角形の対角として

∠B+∠D=〔　　〕° ……(答)

(2) △ABC に余弦定理を使って

$AC^2=AB^2+BC^2-2\,AB\cdot BC\cos\angle B$

$x^2=a^2+b^2-$〔　　〕$\cos\angle B$ ……①

△ADC に余弦定理を使って

$AC^2=CD^2+DA^2-2\,CD\cdot DA\cos\angle D$

$x^2=c^2+d^2-$〔　　〕$\cos(180^\circ-\angle B)=c^2+d^2+$〔　　〕 …②

←$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

①と②から

a^2+b^2-〔　　〕$\cos\angle B=c^2+d^2+$〔　　〕$\cos\angle B$

←これを cos∠B について解く。

$a^2+b^2-c^2-d^2=2($〔　　〕$)\cos\angle B$

ゆえに, $\cos\angle B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(〔\quad〕)}$

これを①に代入して

$$x^2=a^2+b^2-\frac{〔\quad〕(a^2+b^2-c^2-d^2)}{〔\quad〕}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(〔\quad〕)-〔\quad〕(a^2+b^2-c^2-d^2)}{〔\quad〕}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)〔\quad〕+ab(〔\quad〕)}{〔\quad〕}$$

$$=\frac{dca^2+b(〔\quad〕)a+b^2dc}{〔\quad〕}$$

←a についてまとめて, 因数分解。(→第3講座)

$$=\frac{(da+bc)(〔\quad〕)}{〔\quad〕}$$

よって, $x=\sqrt{\dfrac{(da+bc)(ca+bd)}{〔\quad〕}}$ ……(答)

(3) (2)と同様に考えて $y=\sqrt{\dfrac{(ab+dc)(〔\quad〕)}{〔\quad〕}}$

←(2)の答えで, b と d とを入れかえればよい。

よって, $xy=\sqrt{\dfrac{(da+bc)(〔\quad〕)}{〔\quad〕}}\times\sqrt{\dfrac{(ab+dc)(〔\quad〕)}{〔\quad〕}}$

=〔　　〕 ……(答)

解法の Points

例題 3

△ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とおくと，
$(a+b):(b+c):(c+a)=4:5:6$ となり，△ABC の面積が $15\sqrt{3}$ である。
このとき，次のおのおのの値を求めよ。

(1) $a:b:c$　　(2) $\cos C$

(3) △ABC の外接円の半径 R　　(4) △ABC の内接円の半径 r

（東京農大）

●解答への Approach

(1) 題意より，次のようにおいてよい。

$a+b=4k$ …①　　$b+c=5k$ …②　　$c+a=6k$ …③

$\dfrac{①+②+③}{2}$ を考えて，　　$a+b+c=\dfrac{〔\quad〕}{2}k$　　……④

④−②，④−③，④−①より

$$a=\frac{〔\quad〕}{2}k,\ b=\frac{〔\quad〕}{2}k,\ c=\frac{〔\quad〕}{2}k$$

よって，　　$a:b:c=〔\quad〕:〔\quad〕:〔\quad〕$　　……(答)

(2) 余弦定理から

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{5^2+3^2-〔\quad〕^2}{2\cdot〔\quad〕}=\frac{25+9-〔\quad〕}{〔\quad〕}$$

$$=-\frac{〔\quad〕}{30}=-\frac{1}{〔\quad〕}$$　　……(答)

(3) (2)の結果から　　$C=〔\quad〕^\circ$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}k\cdot\frac{3}{2}k\cdot\frac{〔\quad〕}{2}=\frac{〔\quad〕}{〔\quad〕}\sqrt{3}k^2$$

これが $15\sqrt{3}$ に等しいことから

$k^2=〔\quad〕$，$k=〔\quad〕$，$c=〔\quad〕$

正弦定理から　　$2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{〔\quad〕}{\sin〔\quad〕^\circ}=\dfrac{〔\quad〕\sqrt{3}}{3}$

よって，　　$R=\dfrac{〔\quad〕\sqrt{3}}{3}$　　……(答)

(4) ④と $k=〔\quad〕$ から，　　$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{〔\quad〕}{4}k=〔\quad〕$

△ABC$=rs$ から，

$$r=\frac{\triangle ABC}{s}=\frac{15\sqrt{3}}{〔\quad〕}=〔\quad〕$$　　……(答)

解法の Points

← $\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{b+c}{5}=\dfrac{c+a}{6}=k$ と考えてもよい。

← $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

← $k>0$ である。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 46）

1 △ABC の辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。$(2a+b):(2b+c):(2c+a)=10:13:13$ のとき，$\sin B$ の値を求めよ。

（拓殖大）

2 △ABC で $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle A=60^\circ$ のとき，a，b，c の関係を求めよ。また，$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{b}{a+c}$ の値を求めよ。

（昭和薬大）

3 △ABC で $2\sin B\cos A=\sin B+\sin C-\sin A$ が成り立つとき，△ABC はどんな三角形か。

（神戸女大）

4 △ABC において次の関係式が成り立つとき，3 辺 $a:b:c$ の比を求めよ。

$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，　$\cos A+5\cos B+\cos C=5$

（自治医大）

5 3 辺の長さが 4，13，15 であるような三角形の面積と，その内接円の半径を求めよ。

（大阪産業大）

6 三角形 ABC において，$AB=5$，$BC=7$，$\cos A=-\dfrac{1}{5}$ のとき，AC の長さと，三角形 ABC の面積を求めよ。

（千葉工大）

7 △ABC において $\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，面積 $=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，3 つの辺 AB，BC，CA の長さを求めよ。

（日本工大）

8 △ABC について，次の関係が成り立っている。

$$b^2-c^2\cos^2 B=c^2-b^2\cos^2 A,\qquad \frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin C}$$

この △ABC はどのような三角形であるか。

（松山大）

Hints

1 例題 3 のはじめの部分にならえ。

2 余弦定理の利用。

3 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ などとおけ。

4 3同様のおきかえ。

5 例題 3 をまねて，まず 1 つの角の正弦を求めよ。

6 AC は余弦定理。面積は $\sin A$ がわかればよい。

7 A から辺 BC に垂線をおろして 2 つの三角形に分けよ。

8 3のヒントが役に立つ。