32 平面ベクトル

☞解答は「解説と解答」p. 131

第32講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 244〜251，256〜263 参照〕

1．平面上のベクトルについての基本性質。
2．ベクトルの成分表示。
3．ベクトルと比例関係を使った応用問題。

さくらの個別指導
H25.03.13
さくら教育研究所

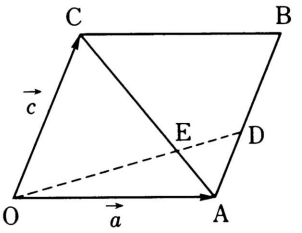
例題 1 平行四辺形 OABC の辺 AB を 2：3 の比に内分する点を D，対角線 AC を 2：5 の比に内分する点を E とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，ベクトル $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) 3 点 O，E，D は 1 直線上にあることを示せ。

●解答への Approach

(1) AD：DB＝2：3 だから，



$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{}\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{OB}}{2+3}$$

$$=\frac{\boxed{}\vec{a}+\boxed{}(\vec{a}+\vec{c})}{5}$$

$$=\frac{\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c}}{5}$$

$$=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c}$$ ……(答)

AE：EC＝2：5 だから

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{}\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{OC}}{2+\boxed{}}$$

$$=\frac{\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c}}{\boxed{}}$$

$$=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c}$$ ……(答)

(2) (1)の結果から

$$\overrightarrow{OD}=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c},\quad \overrightarrow{OE}=\boxed{}\vec{a}+\boxed{}\vec{c}$$

ゆえに，
$$\overrightarrow{OD}=\boxed{}\overrightarrow{OE}$$

これより，3 点 O，E，D は 1 直線上にある。 (証明終わり)

解法の Points

← 線分 AB を $m:n$ に内分する点を C とすれば

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

平面上の任意のベクトルは $x\vec{a}+y\vec{c}$ の形で，ただ 1 通りに表される。

← 3 点 O, E, D が 1 直線上にある条件は

$\overrightarrow{OD}=k_1\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OE}=k_2\overrightarrow{OD}$

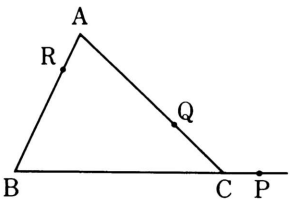
$\overrightarrow{OD}=k_3\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{OE}=k_4\overrightarrow{ED}$

など，どれでもよい。

例題 2 右図のような三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB 上（延長線上を含む）にそれぞれ 3 点 P，Q，R をとり，$\overrightarrow{BP}=l\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{CQ}=m\overrightarrow{QA}$，$\overrightarrow{AR}=n\overrightarrow{RB}$ とする。（ただし，$lmn\neq 0$）

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{AQ}$，l，m，n を用いて表せ。

(2) 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるための必要十分条件を，l，m，n を用いて表せ。



●解答への Approach

(1) 与えられた 3 条件を，A を始点として書きなおせば

$\overrightarrow{BP}=l\overrightarrow{PC}$ は　$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=l(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$　……①

$\overrightarrow{CQ}=m\overrightarrow{QA}$ は　$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=-m\overrightarrow{AQ}$　……②

$\overrightarrow{AR}=n\overrightarrow{RB}$ は　$\overrightarrow{AR}=n(\boxed{}-\boxed{})$　……③

①を $\overrightarrow{AP}$ について解けば，

$$(1+l)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$$

ここで $l=-1$ ならば，①より B=C となり矛盾する。

よって，　$\overrightarrow{AP}=\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{AC}$　……④

②を $\overrightarrow{AC}$ について解けば

$$\overrightarrow{AC}=(1+m)\overrightarrow{AQ}$$　……⑤

③を $\overrightarrow{AB}$ について解けば

$(1+n)\overrightarrow{AR}=\boxed{}\overrightarrow{AB}$　から　$\overrightarrow{AB}=\boxed{}\overrightarrow{AR}$　……⑥

⑤，⑥を④に代入して

$$\overrightarrow{AP}=\boxed{}\cdot\boxed{}\overrightarrow{AR}+\boxed{}\cdot(\boxed{})\overrightarrow{AQ}$$

$$=\boxed{}\overrightarrow{AQ}+\boxed{}\overrightarrow{AR}$$　……(答)

(2) 3 点 P，Q，R が 1 直線上にあるための条件は

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AQ}+(1-t)\overrightarrow{AR}$$

と表せることだから，(1)の結果を使えば，$\overrightarrow{AQ}$ の係数と $\overrightarrow{AR}$ の係数の和が 1 となればよく

$$\boxed{}+\boxed{}=1$$

分母を払って

$$\boxed{}+\boxed{}=\boxed{}$$

これを整理して，求める条件は

$$\boxed{}=0$$　……(答)

解法の Points

←すべて，A を始点とするベクトルで表してみよう。$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{AR}$ で表すためには，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ がジャマである。
②から $\overrightarrow{AC}$ を，③から $\overrightarrow{AB}$ を出して，①に代入すればよい。

←式の変形の途中において，ときどき分数式が現れる。この際，分母=0 となる場合に注意する必要がある。

← 3 点が 1 直線上にあるための条件には，$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$ などもあるが，これでは(1)の結果が使えない。

←この条件の他に，題意より $l\neq -1$，$m\neq -1$，$n\neq -1$ の条件がもともとついている。

例題 3 平面上の点 P $(x_0,\ y_0)$ を通り，ベクトル $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ に平行な 2 直線 l_1，l_2 が，放物線 $y^2=2x$ とそれぞれ 2 点 A，B および C，D で交わっているとする。ただし α，β は，$0^\circ<\alpha<180^\circ$，$0^\circ<\beta<180^\circ$ である。

(1) 直線 l_1上の任意の点を $Q(x,\ y)$ とする。点 P から点 Q への，向きを考えた距離(ベクトル$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$の方向を正として)を t とおくとき，x，y を t を用いて表せ。

(2) 点 P を放物線 $y^2=2x$ 上にない点とするとき，比 PA・PB：PC・PD は点 P に無関係であることを示せ。

(秋田大)

●解答への Approach

(1) $\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$ とおくと，

$\overrightarrow{PQ}=t\vec{a}$ であるから，これを成分で書けば，

$$(x-x_0,\ 〔\qquad〕)=t(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$

すなわち　$x-x_0=t\cos\alpha$，〔　　〕$=t\sin\alpha$

よって，　$x=x_0+t\cos\alpha$，$y=$〔　　〕　……(答)

(2) 交点を求めるために，$y^2=2x$ に(1)の結果を代入して

$$(〔\qquad\qquad〕)^2=2(x_0+t\cos\alpha)$$

すなわち

$$t^2\sin^2\alpha+2(〔\qquad\qquad〕)t+{y_0}^2-〔\qquad〕=0$$

解と係数との関係から

$$PA\cdot PB=\frac{〔\qquad\qquad〕}{\sin^2\alpha}\quad(0^\circ<\alpha<180^\circ\text{ だから }\sin^2\alpha\neq0)$$

まったく同様に，$y^2=2x$ と l_2 との交点についても

$$PC\cdot PD=\frac{〔\qquad\qquad〕}{〔\qquad\qquad〕}\quad(0^\circ<\beta<180^\circ\text{ だから〔}\qquad\qquad〕)$$

P は放物線 $y^2=2x$ 上にないので，　${y_0}^2-2x_0\neq0$

よって，

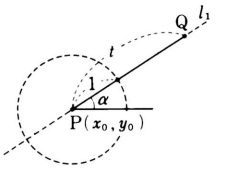
$$PA\cdot PB:PC\cdot PD=\frac{〔\qquad\qquad〕}{\sin^2\alpha}:\left[\qquad\qquad\right]$$

$$=〔\qquad〕:〔\qquad〕$$

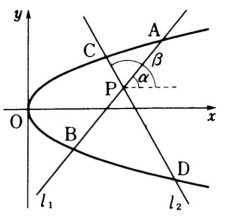
これは，$P(x_0,\ y_0)$ に無関係で一定である。　(証明終わり)

解法の Points

←



←



$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$$

のとき，t は $(x,\ y)$ と $(x_0,\ y_0)$ との距離を表している。

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 133)

1 (1) 始点がA(5, −2)，終点がB(−2, 6) であるようなベクトル $\overrightarrow{AB}$ を成分で表せ。

(2) ベクトル $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(-4,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ 11)$ について，$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$ をみたす x を求めよ。

2 △ABCの辺AB上に点Pを，辺BC上に点Qを，AP：PB＝BQ：QC＝s：t であるようにとると，$\overrightarrow{PQ}=$ ［　　］$\overrightarrow{AB}+$ ［　　］$\overrightarrow{AC}$ である。

(東海大-医)

3 xy平面上の3つのベクトル $\vec{a}=\left(2x,\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\vec{b}=(x,\ y)$，$\vec{c}=\left(-1,\ \dfrac{8}{3}\right)$ が $x\vec{a}+3\vec{b}=\vec{c}$ なる関係をみたすとき，x，yの値を求めよ。 (弘前大)

4 △ABC の内部に点Pがあって，$3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+5\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ である。△ABP，△BCP，△CAP の面積の比を求めよ。

5 曲線 $y=\log_3 x$ 上の3点P_1，P_2，P_3と点Q(2, 1) について

$$\overrightarrow{QP_1}+\overrightarrow{QP_2}=\overrightarrow{QP_3}$$

が成立し，P_1とP_2の x 座標は整数であるという。P_1，P_2，P_3 の座標を求めよ。

(京都府医大)

6 原点Oを中心とする半径1の円周上に異なる6個の点P_1, P_2, ……, P_6がある。このとき，ベクトル$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，……，$\overrightarrow{OP_6}$の中から適当な2個を選んで，その和の大きさが $\sqrt{3}$ 以上となるようにできることを証明せよ。

(お茶の水女大)

7 同一直線上にない3点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，線分AB，ACの長さをそれぞれ p，q とする。

$$\vec{a}+t\left(\frac{\vec{b}-\vec{a}}{p}+\frac{\vec{c}-\vec{a}}{q}\right)\quad (t\geqq 0)$$

を位置ベクトルとしてもつ点は，どのような図形をえがくか。(阪　大)

Hints

1 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

(2) 代入すれば

$(3x,\ x)+(-4y,\ 2y)$
$=(3,\ 11)$

これを連立方程式で解く。

2 すべてAを始点とするベクトルで表し，例題2 (p.126)の方法を使えばよい。

3 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を与えられた等式に代入して x 成分，y 成分を考えれば，あとは連立方程式を解くだけ。

4 $-\overrightarrow{AP}=3\times\dfrac{4\overrightarrow{BP}+5\overrightarrow{CP}}{5+4}$

と変形してみよう。右辺は何を表しているか？

5 P_1，P_2，P_3 の座標を，それぞれ$(a,\ \log_3 a)$，$(b,\ \log_3 b)$，$(c, \log_3 c)$とおいて，式をつくってみよう。

6 考えにくい問題だが，まず隣り合った2点とOとのなす角の最小値をθとすると$\theta\leqq 60^\circ$がでる。ここで2つのベクトルの和の計算をするとよい。

7 与えられた式の中にある

$$\frac{\vec{b}-\vec{a}}{p}$$

が$\overrightarrow{AB}$に沿う単位ベクトルであることに気づけば，あとは何とかなるだろう。

33 ベクトルの内積

☞解答は「解説と解答」p. 136

第33講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 252〜263 参照〕

1．内積の定義と意味，基本性質。

2．成分と内積と角の関係。

3．内積を使っての種々の応用問題。

例題 1 三角形OABにおいて，ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}$ の長さをそれぞれ a，b，c とし，線分ABを $m:n$ に内分する点をPとする。ただし，$m>0$，$n>0$ である。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を数 m，n とベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ の内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を a，b，c で表せ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ の長さ p を a，b，c，m，n で表せ。

●解答へのApproach

(1) AP：PB$=m:n$ だから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\text{〔\quad〕}\overrightarrow{OA}+\text{〔\quad〕}\overrightarrow{OB}}{m+n} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) 余弦定理から $\cos\angle AOB=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{\text{〔\quad〕}}$

よって，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=a\cdot b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{\text{〔\quad〕}}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{\text{〔\quad〕}} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

(3) (1)，(2)の結果を使って

$$|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}(n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB})\cdot(n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\{\text{〔\quad〕}|\overrightarrow{OA}|^2+\text{〔\quad〕}(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+\text{〔\quad〕}|\overrightarrow{OB}|^2\}$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\{\text{〔\quad〕}a^2+mn(\text{〔\quad〕})+\text{〔\quad〕}b^2\}$$

したがって

$$p=\frac{1}{m+n}\sqrt{\text{〔\quad〕}} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

解法のPoints

←分点の公式から，簡単に求めることができる。

←内積は
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$
で，△OABの3辺の長さが与えられているから，余弦定理を用いれば a，b，c で表すことができる。

←(1)，(2)から，まず
$|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$
を計算する。

例題 2 平面上に 3 点 O, A, B があり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=4$，$\angle AOB=60^\circ$ のとき，$0\leqq t\leqq 1$ に対して $\overrightarrow{P(t)}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$ のとき $\overrightarrow{P(t)}$ の大きさの 2 乗を最小にする t の値を求めよ。 (岩手医大)

●解答への Approach

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=[\quad]$，　$\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=[\quad]$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\cdot 4\cdot\left[\quad\right]=[\quad]$

であるから，

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{P(t)}|^2&=\overrightarrow{P(t)}\cdot\overrightarrow{P(t)}\\
&=\{\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\}\cdot\{\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})\}\\
&=\{([\quad])\vec{a}+[\quad]\vec{b}\}\cdot\{([\quad]\vec{a}+[\quad]\vec{b}\}\\
&=[\quad]\vec{a}\cdot\vec{a}+2[\quad]\vec{a}\cdot\vec{b}+[\quad]\vec{b}\cdot\vec{b}\\
&=[\quad](1-t)^2+[\quad]t(1-t)+[\quad]t^2\\
&=9-18t+9t^2+[\quad]t-[\quad]t^2+[\quad]t^2\\
&=[\quad]t^2-[\quad]t+[\quad]\\
&=13\left\{t^2-\left[\quad\right]t+\left[\quad\right]^2-\left[\quad\right]^2\right\}+[\quad]\\
&=13\left(t-\left[\quad\right]\right)^2+\frac{-[\quad]+[\quad]}{13}\\
&=13\left(t-\left[\quad\right]\right)^2+\frac{[\quad]}{13}
\end{aligned}
$$

この式から，$0\leqq t\leqq 1$ において，$|\overrightarrow{P(t)}|^2$ は $t=\left[\quad\right]$ のときに最小となることがわかる。

(答)　$t=\left[\quad\right]$

解法の Points

「**ベクトル $\vec{a}$ の大きさ**」とは $|\vec{a}|$ である。$|\vec{a}|$ のままではわかりにくい。$|\vec{a}|^2$ を考えて

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$$

を使おう。

ベクトルの内積には**分配法則**が成り立つ。したがって，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$$

などが使える。

数の乗法公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

との類似性に注意しよう。

この問題は，t に関する 2 次関数の最大・最小問題となった。

2 次関数の最大・最小問題では，標準形 $a(t-p)^2+q$ の形になおすことが大切。

なお，この問題は，図形の幾何学的性質，すなわち

$$\overrightarrow{P(t)}\perp(\vec{b}-\vec{a})$$

を使って解くこともできる。別解を参照されたい。

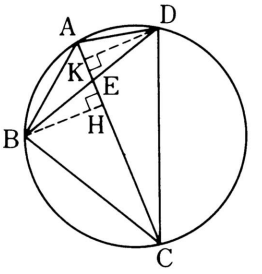
例題 3 円に内接する四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$ となる点 E は直線 AC 上にあることを証明せよ。

(2) △ABC，△ACD の面積の比を求めよ。

(3) $3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$ の値を求めよ。ただし，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$ は，それぞれ内積を表す。（埼玉大）

●解答への Approach



(1) $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$

を，A を始点とするベクトルで表し，

$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}(〔\quad〕-〔\quad〕)$

ゆえに，　$\overrightarrow{AE}=〔\quad〕(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD})$

これと最初の条件

$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

より　$\overrightarrow{AE}=〔\quad〕\overrightarrow{AC}$　　よって，E は直線 AC 上にある。

（証明終わり）

(2) (1)より E は AC，BD の交点で，　BE：ED＝2：〔　〕

B，D から AC へおろした垂線の足をそれぞれ H，K とすると

△ABC：△ACD＝$\frac{1}{2}$AC・BH：$\frac{1}{2}$AC・DK

＝BH：DK＝BE：ED＝〔　〕：〔　〕　……(答)

(3) ∠ABC＝α とおけば，四辺形 ABCD は円に内接しているので，対角は補角をなし　∠ADC＝〔　〕$-\alpha$

$3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3\,\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cos\alpha-〔\quad〕\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\cos\alpha$

$=〔\quad〕(3\,\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}-〔\quad〕\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC})$

ところで(2)の結果を使えば，　△ABC：△ACD＝2：〔　〕で

△ABC：△ACD

$=\frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin\alpha:\frac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\sin\alpha$

＝BA・BC：〔　〕

と考えることもできるので，

BA・BC：DA・DC＝2：3

これと合わせて，求める値は　0　……(答)

解法の Points

←ベクトルの応用問題では，すべてのベクトルの始点を統一せよ。統一の原理は，
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

←三角形の面積比は，底辺が共通ならば高さの比で定まる。

←円に内接する四辺形の対角の和は 180°である。

← 2 辺と夾角がわかっているとき，三角形の面積の公式は，基本中の基本。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 138）

1 次の□に当てはまる数は何か。

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は□である。 （近畿大-医）

(2) 平面上の 3 つのベクトルを $\vec{a}=(4,\ 3)$, $\vec{b}=(6,\ \square)$, $\vec{c}=(18,\ \square)$ とする。$|\vec{a}|=\square$ で，$\vec{a}\perp\vec{b}$ であり，$|\vec{b}|=\square|\vec{a}|$ で，$\vec{c}=\square\vec{a}+\vec{b}$ である。 （神戸女子薬大）

2 三角形 ABC において，BC$=a$, CA$=b$, AB$=c$ とする。この三角形の重心を G とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ を a, b, c で表せ。 （姫路工大）

3 O を始点とする 2 つのベクトルを $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が 60° で，$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AB}$ の大きさを求めよ。

(3) AB の中点を M とするとき，$\overrightarrow{OM}$ の大きさを求めよ。

(4) O から直線 AB におろした垂線の足を H とするとき，AH：HB を求めよ。 （北海道工大）

4 座標平面上に 2 点 A(2, 1)，B(2, −1) がある。x 軸上に点 P$(x,\ 0)$ をとり，ベクトル $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ のなす角を θ とする。

(1) $\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(2) $\theta=120°$ になるような x の値を求めよ。 （杏林大-医）

5 正六角形 ABCDEF において次の□をうめよ。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{v}$ とすれば，$\overrightarrow{EA}=\square\vec{u}+\square\vec{v}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{FA}=\square\vec{u}+\square\vec{v}$ である。

(2) この正六角形の 1 辺の長さを a とすれば，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}$ の内積は□であり，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EF}$ と $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{AB}$ との内積は□である。 （東京女子医大）

6 次の(1), (2)に答えよ。ただし，ベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ の内積を $\vec{x}\cdot\vec{y}$，ベクトル $\vec{x}$ の大きさを $|\vec{x}|$ で表す。

(1) 不等式 $2\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\vec{a}$ を定ベクトルとし，ベクトルの集合 $S=\{\vec{x}\,|\,|\vec{x}|^2+\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1\}$ を考える。S に属する任意のベクトル $\vec{x}$, $\vec{y}$ と，任意の実数 $t\,(0\leqq t\leqq1)$ に対して，ベクトル $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$ は S に属することを証明せよ。 （神戸大）

Hints

1 (1) ベクトルの大きさは，$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ として考えよ。

(2) $\vec{b}=(6,\ b)$, $\vec{c}=(18,\ c)$ とおけば，与えられた条件はどのような式で表されるか。

2 重心のベクトル $\overrightarrow{AG}$ を求めてあとは計算するのだが，この際，余弦定理を使う。

3 (2) 余弦定理でもよいが，内積の応用として考えてみよう。

(4) **垂直条件**とは，内積が 0 のこと。

4 (1) 2 つのベクトルの間の角は，内積で表せる。

5 まず正六角形をていねいにかいて見当をつけよ。正六角形の 1 つの内角が120°であることに注意。

6 (1) 内積 $(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y})$ を考える。

(2) $\vec{z}=t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$ $(0\leqq t\leqq1)$ とおくとき，S に属する任意の $\vec{x}$, $\vec{y}$ に対して

$$|\vec{z}|^2+\vec{a}\cdot\vec{z}\leqq1$$

を示せばよい。

34 空間ベクトル

☞解答は「解説と解答」p. 141

第34講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 264〜275 参照〕

1．ベクトルの考えを空間に拡張する。

2．長さ，成分，内積等の 3 次元での取り扱い。

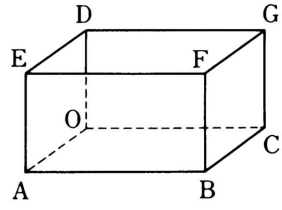
3．空間図形への応用を，ベクトルで考える。

例題 1 右図の直方体において，AB＝3，AE＝2，AO＝1 である。
このとき，次の内積の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OF}$

(3) $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OG}$　　(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}$

(5) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}$　　(6) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$



●解答への Approach

(1) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O〔\quad〕}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ だから，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=〔\quad〕$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+〔\quad〕)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\cdot〔\quad〕$

$=|\overrightarrow{OA}|^2=〔\quad〕$ ……(答)

(2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+〔\quad〕$，$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{O〔\quad〕}$

よって　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OA}+〔\quad〕)\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+〔\quad〕)$

ここで $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{OA}$ に注意すれば

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=〔\quad〕$

ゆえに，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OF}=|\overrightarrow{OA}|^2+〔\quad〕^2=1+〔\quad〕=〔\quad〕$ ……(答)

(3) $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OG}=(\overrightarrow{OA}+〔\quad〕+〔\quad〕)\cdot(\overrightarrow{OC}+〔\quad〕)$

$=〔\quad〕^2+〔\quad〕^2=〔\quad〕+〔\quad〕=〔\quad〕$ ……(答)

(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}\cdot(〔\quad〕+〔\quad〕)$

$=\overrightarrow{OA}\cdot〔\quad〕+\overrightarrow{OA}\cdot〔\quad〕=〔\quad〕$ ……(答)

(5) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-〔\quad〕)\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

$=〔\quad〕^2-〔\quad〕^2=〔\quad〕-〔\quad〕=〔\quad〕$ ……(答)

(6) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})\cdot(〔\quad〕-〔\quad〕)$

$=(\overrightarrow{OC}+〔\quad〕)\cdot(\overrightarrow{OD}-〔\quad〕)$

$=〔\quad〕=〔\quad〕$ ……(答)

解法の Points

←すべてのベクトルを，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ のみで表してみよう。

←$\vec{a}\perp\vec{b}\Longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
は重要な関係。
内積には，**分配法則**
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
が成り立つ。
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

←O を始点とするベクトルで考える。(6)も同じ。
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

●この問題は OA を x 軸，OC を y 軸，OD を z 軸と考えて，座標を使って解くこともできる。別解を参照されたい。

例題 2 空間内の3点をA(3, 1, 2), B(−1, 0, 3), C(−2, 3, 2)とするとき,

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$を求めよ。

(2) ∠BACの余弦を求めよ。

(3) △ABCの面積を求めよ。 (神奈川大-工)

●解答へのApproach

(1) 原点をO(0, 0, 0)とすると,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,\ 0,\ 3)-(3,\ 1,\ 2)$$
$$=(\text{〔\quad〕},\ \text{〔\quad〕},\ \text{〔\quad〕})$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,\ 3,\ 2)-(3,\ 1,\ 2)$$
$$=(\text{〔\quad〕},\ \text{〔\quad〕},\ \text{〔\quad〕})$$

よって, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\text{〔\quad〕}-2+0=\text{〔\quad〕}$ ……(答)

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(\text{〔\quad〕})^2+1^2}=\sqrt{16+\text{〔\quad〕}+1}$

$=\sqrt{\text{〔\quad〕}}=\text{〔\quad〕}\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-5)^2+\text{〔\quad〕}^2+\text{〔\quad〕}^2}=\sqrt{25+\text{〔\quad〕}+\text{〔\quad〕}}$

$=\sqrt{\text{〔\quad〕}}$

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\text{〔\quad〕}}{\text{〔\quad〕}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\text{〔\quad〕}}}=\frac{6}{\sqrt{\text{〔\quad〕}}}$$
$$=\frac{3\sqrt{\text{〔\quad〕}}}{\text{〔\quad〕}}$$ ……(答)

(3) $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\dfrac{18}{\text{〔\quad〕}}}$

$$=\sqrt{\frac{\text{〔\quad〕}-18}{\text{〔\quad〕}}}=\sqrt{\frac{\text{〔\quad〕}}{\text{〔\quad〕}}}$$

したがって,

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\text{〔\quad〕}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\text{〔\quad〕}}\cdot\sqrt{\frac{\text{〔\quad〕}}{\text{〔\quad〕}}}$$
$$=\frac{3\sqrt{\text{〔\quad〕}}}{2}$$ ……(答)

解法のPoints

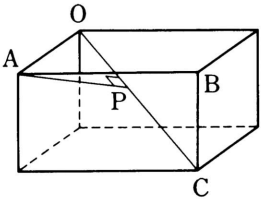
← 2つのベクトル $(a_1,\ a_2,\ a_3)$と$(b_1,\ b_2,\ b_3)$ の内積は,
$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3$$

← 2つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$のなす角をθとすると,
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

←(2)によりcos∠BACがわかっているので,これから, sin∠BAC がわかる。

$\triangle ABC$
$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\angle BAC$

例題 3 直方体の3辺を，図に示すようにそれぞれ長さ a，b，c のベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ とし，対角線OCに頂点Aから垂線APをおろすとき，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を用いて表し，それらの長さを求めよ。 （帝京大－医）



●解答へのApproach

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \quad \cdots\cdots①$$

点PはOC上にあるので，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}$ とおくことができる。

①式から $\overrightarrow{OP}=k(\boxed{}+\boxed{}+\boxed{})$ ……②

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=k(\boxed{}+\boxed{}+\boxed{})-\overrightarrow{OA}$$

$$=(\boxed{})\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{BC} \quad \cdots\cdots③$$

ところが，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{OC}$ とは垂直なので，この内積は0である。

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

この式に①と③を代入して

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\{(\boxed{})\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{BC}\}=0$$

ここで，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから，上の式は

$$(\boxed{})|\overrightarrow{OA}|^2+\boxed{}|\overrightarrow{AB}|^2+\boxed{}|\overrightarrow{BC}|^2=0$$

$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{AB}|=b$，$|\overrightarrow{BC}|=c$ だから，これを代入して

$$\boxed{}=0$$

ゆえに $k=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

これより $\overrightarrow{OP}=\boxed{}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$ ……(答)

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{\boxed{}}\{\boxed{}\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{AB}+\boxed{}\overrightarrow{BC}\}$

……(答)

次に，これらの2つのベクトルの大きさを考えると，

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$ で，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{\boxed{}}$ だから，

$$|\overrightarrow{OP}|=\boxed{}|\overrightarrow{OC}|$$

$$=\boxed{}\times\boxed{}=\boxed{} \quad \cdots\cdots(答)$$

また，△AOPが直角三角形であることに注意すれば

$$|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2$$

$$=a^2-\boxed{}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{AP}|=\boxed{}$ ……(答)

解法のPoints

すべてのベクトルを，同一平面上にない3つのベクトルで表す。この問題ではそれが，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ である。

←OCに垂線APをおろせば，
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

この問題では，$\overrightarrow{OP}$ が不明だからというので
$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{BC}$
などとおくと，未知数が多くなってソンをする。未知数を k だけにして考えるのがウマイ方法。

←大きさを求めるときも，
$|\overrightarrow{OP}|^2=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}$
$=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$
として展開するのは，できるがめんどうである。
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$
とすれば $\overrightarrow{OC}$ の大きさがわかることや，△AOPが直角三角形であることなど，図形的性質を適当に使うことによって計算が簡単になる。

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 143)

1 次の□に当てはまる数は何か。

(1) 3点 $(-1, -5, 5)$, $(2, 1, 2)$, $(4, \square, \square)$ は同一直線上にある。

(2) 2点 $P(2, 5, -3)$, $Q(4, -2, 3)$ から等距離にある z 軸上の点の z 座標は□である。

2 四面体OABCにおいて，三角形ABCとOBCの重心をそれぞれG，G′とする。次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ を証明せよ。

(2) 直線OGとAG′が，交わることを証明せよ。

(3) (2)の交点をPとするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。(摂南大)

3 空間において3つのベクトル $\vec{a}=(1, 0, 1)$, $\vec{b}=(0, 1, 0)$, $\vec{c}=(1, 2, 3)$ が与えられている。ベクトル $\vec{x}=(4, 0, 6)$ を，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を使って表せ。(国士舘大-工)

4 次の□に適当な数を入れよ。

4つのベクトル $\vec{a}=(1, 3, -2)$, $\vec{b}=(0, 1, 0)$, $\vec{c}=(0, -2, 1)$, $\vec{d}=(\square, \square, 2)$ がある。$\vec{d}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とに垂直である。また，$\vec{d}=\square\vec{a}+\square\vec{b}+\square\vec{c}$ である。

5 四面体OABCで，OA⊥BC，OB⊥CAならば，OC⊥ABであるといってよいかどうかを調べよ。

6 $\vec{a}=(5, 2, 3)$, $\vec{b}=(2, 4, 1)$ のとき，$\vec{a}$ の上への $\vec{b}$ の正射影の大きさを求めよ。

7 四面体ABCDについて，次の問いに答えよ。

(1) 辺AB，AC，ADの中点をそれぞれP，Q，Rとし，またCD，DB，BCの中点をそれぞれP′，Q′，R′とする。このときPP′，QQ′，RR′は1点で交わることを証明せよ。

(2) この四面体の外接球の中心をOとし，上の(1)で定まる交点をGとする。点Oの点Gに関する対称点をHとすれば，PHとCDは垂直であることを証明せよ。(福井医大)

Hints

1 (1) A, B, Cが同一直線上にある条件は，$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

(2) 求める z 軸上の点を，$(0, 0, z)$ としてみよう。

2 (2) $\overrightarrow{OG}$ を変形して，直線AG′上の1点Pに対して，

$$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OP}$$

となればよい。

3 $\vec{x}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ と考える。

4 $\vec{d}=(p, q, 2)$ とおいて，2つの垂直条件

$$\vec{d}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{d}\cdot\vec{b}=0$$

から，まず p, q を求める。

5 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ と $\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$ とから $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=0$ が出るかどうか？

6 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角の余弦に着目する。

7 (1) PP′, QQ′, RR′の中点が一致することをいう。

(2) 題意より $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OG}$ に気がつけばよい。

35 複素数

☞解答は「解説と解答」p. 145

第35講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 276〜278 参照〕

1．複素数の定義，相等条件，四則計算。

2．2次方程式に現れる虚数解。

3．1の虚数立方根としての ω の性質。

例題 1 次の問いに答えよ。

(1) 相異なる2つの複素数 x，y が

$$x^2-y=i,\ y^2-x=i \quad (i=\sqrt{-1})$$

をみたすとき，$x+y$ と x^2+y^2 の値を求めよ。

(2) 相異なる3つの複素数 x，y，z が

$$x^2-yz=i,\ y^2-zx=i,\ z^2-xy=i \quad (i=\sqrt{-1})$$

をみたすとき，$x+y+z$，$xy+yz+zx$，$x^2+y^2+z^2$ の値を求めよ。 (近畿大)

●解答への Approach

(1) $x^2-y=i$ ……① $y^2-x=i$ ……②

①−②： $(x^2-y^2)+[\quad\quad]=(x-y)[\quad\quad]=0$

$x\neq y$ だから，$[\quad\quad]=0$ ゆえに，$x+y=[\quad\quad]$ ……(答)

①+②： $(x^2+y^2)-[\quad\quad]=2i$

ゆえに， $x^2+y^2=[\quad\quad]+2i=[\quad\quad]$ ……(答)

(2) $x^2-yz=i$ ……③ $y^2-zx=i$ ……④ $z^2-xy=i$ ……⑤

③−④： $(x^2-y^2)+[\quad\quad]z=(x-y)[\quad\quad]=0$

$x\neq y$ だから， $x+y+z=[\quad\quad]$ ……(答)

③+④+⑤： $(x^2+y^2+z^2)-[\quad\quad]=3i$ ……⑥

よって， $(x+y+z)^2-[\quad\quad]=3i$

$x+y+z=[\quad\quad]$ であるから，

$xy+yz+zx=[\quad\quad]$ ……(答)

これを⑥に代入すると，

$x^2+y^2+z^2=(xy+yz+zx)+3i=[\quad\quad]$ ……(答)

解法の Points

←同じ形の並んでいる連立方程式は
{すべて加えるか
{辺々引いてみる。

← $x^2+y^2+z^2$
$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

例題 2 次の問いに答えよ。

(1) 実数 a, b が $\dfrac{a+bi}{2+3i}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i$ をみたすとき，a, b を求めよ。 (福岡工大)

(2) $x=1-\sqrt{2}\,i$ のとき，$2x^4-3x^3+3x^2+6x-2$ の値を求めよ。 (東京電機大)

●解答への Approach

(1) $a+bi=(2+3i)\left(\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{13}i\right)=2\times\dfrac{5}{13}-\dfrac{3}{13}i^2+i\left(3\times\dfrac{5}{13}-\left[\quad\right]\right)$

$=\dfrac{10}{13}+\left[\quad\right]+i\left(\dfrac{15}{13}-\left[\quad\right]\right)=\left[\quad\right]+\left[\quad\right]i$

ゆえに，　$a=\left[\quad\right]$，$b=\left[\quad\right]$ ……(答)

《別解》　$\dfrac{a+bi}{2+3i}=\dfrac{a+bi}{2+3i}\times\dfrac{2-3i}{2-3i}=\dfrac{(2a+3b)+(2b-3a)i}{2^2-(3i)^2}$

$2^2-(3i)^2=13$ だから，あとは $2a+3b=5$，$2b-3a=-1$ を解く。

(2) $x=1-\sqrt{2}i$ のとき，　$x-1=-\sqrt{2}i$

両辺を 2 乗して　$(x-1)^2=\left[\quad\right]$，$x^2-\left[\quad\right]=0$

ここで，右の割り算から

$2x^4-3x^3+3x^2+6x-2$

$=(x^2-2x+3)\left[\quad\right]+\left[\quad\right]$

ここで，$x=1-\sqrt{2}i$ のとき，

$x^2-2x+3=0$

よって，上の式の値は

$\left[\quad\right]+1=\left[\quad\right]$ ……(答)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & \left[\ \ \right] & & \\
\hline
1\ -2\ \ 3) & 2 & -3 & 3 & 6 & -2 \\
 & 2 & -4 & 6 & & \\
\hline
 & & 1 & -3 & 6 & \\
 & & 1 & -2 & 3 & \\
\hline
 & & \left[\ \ \right] & \left[\ \ \right] & \left[\ \ \right] & \\
 & & \left[\ \ \right] & \left[\ \ \right] & \left[\ \ \right] & \\
\hline
 & & & \left[\ \ \right] & \left[\ \ \right] &
\end{array}
$$

《注意》 与えられた 4 次式に，イキナリ $x=1-\sqrt{2}i$ を代入すると，根号や，i や，正負の記号が入り乱れて，計算のまちがいが多くなる。

このような問題では，上の例のように，$x=1-\sqrt{2}i$ を解とする 2 次方程式 $g(x)=0$ をつくり，4 次式を $g(x)$ で割った余りに，$x=1-\sqrt{2}i$ を代入するのが，ミスの少ないウマイ計算法である。

解法の Points

← $i^2=-1$

← 分母の有理化をマネる。

← 係数だけを書いて，割り算をする。

例題 3　次の問いに答えよ。

(1)　x，yを実数とするとき，複素数 $z=x+yi$　の共役複素数 $x-yi$ を z で表すことにする。複素数 α，β について，次の式を証明せよ。

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$$

(2)　1 の 3 乗根のうち 1 でない根の一方を ω とする。ω の共役複素数$\bar{\omega}$を ω で表せ。
次に，複素数 $\alpha=p+q\omega$（p，q は実数）の共役複素数 $\bar{\alpha}$ を ω で表せ。また，$\alpha\bar{\alpha}$ を p と q で表せ。

●解答への Approach

(1)　実数 a_1，a_2，b_1，b_2を使って

$$\alpha=a_1+ia_2,\qquad \beta=b_1+ib_2$$

と書く。

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a_1+ia_2)+(b_1+ib_2)}=\overline{\text{〔　　〕}+i\text{〔　　〕}}$$
$$=\text{〔　　〕}-i\text{〔　　〕}=(a_1-ia_2)+\text{〔　　〕}$$
$$=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$$

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{(a_1+ia_2)\text{〔　　〕}}=\overline{a_1b_1-\text{〔　　〕}+i\text{〔　　〕}}$$
$$=\text{〔　　〕}-i\text{〔　　〕}$$

← $i^2=-1$

一方，$\bar{\alpha}\bar{\beta}=(a_1-ia_2)\text{〔　　〕}$
$$=\text{〔　　〕}-i\text{〔　　〕}$$

← $i^2=-1$

これより，　$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$　（証明終わり）

(2)　$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のとき，

$$\omega^2=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1\mp2\sqrt{3}i-3}{\text{〔　〕}}=\frac{\text{〔　　〕}}{2}=\bar{\omega}$$

← 1 の立方根が 1，ω，ω^2 のことを知っているから，この考えが生まれる。

ゆえに，　$\bar{\omega}=\omega^2$　……(答)

また，　$\bar{\alpha}=\overline{(p+q\omega)}=\bar{p}+\bar{q}\bar{\omega}=\text{〔　　〕}$　……(答)

←(1)の証明の結果を使う。
p が実数 ⇄ $\bar{p}=p$

次に，

$$\alpha\bar{\alpha}=(p+q\omega)(p+q\omega^2)=p^2+\text{〔　〕}\omega+\text{〔　〕}\omega^2+\text{〔　〕}\omega^3$$
$$=p^2+\text{〔　〕}\omega+\text{〔　〕}(-1-\omega)+\text{〔　〕}$$
$$=\text{〔　　〕}$$　……(答)

← $\omega^3=1$，$\omega^2=-1-\omega$

解法の Points

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 147）

1 次の 2 次方程式を解け。

(1) $16x-7=4(x^2+4)$

(2) $3(x+1)^2-4(x+1)+2=0$

2 次の計算をせよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) $(-2+3i)^2+4(-2+3i)+12$

(2) $\left(\frac{1}{i}-i\right)\left(\frac{2}{i}+i\right)i^3-\left(\frac{3}{i}-i^4\right)$

3 次の等式をみたす実数 a，b を求めよ。

(1) $a^2(1+i)-2a(b+i)-8i=0$

(2) $a(a+i)+b(b+i)+2i-8=0$

4 (1) a，b が正の整数のとき，$\alpha=a+bi$ に対して，$\alpha\bar{\alpha}=25$ となる α を求めよ。

(2) a，b が正の実数で，$a^2+b^2=5$ であるとき，$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}=\frac{3}{5}+ci$ となる $\alpha=a+bi$ と，実数 c の値を求めよ。

5 $x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$x^5+3x^4+4x^3+4x^2+3x+1$ の値を求めよ。

6 ω が $x^2+x+1=0$ の解のとき，次の値を求めよ。

(1) $\frac{17-2\omega}{2+\omega}$　　(2) $(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2$

7 (1) $\alpha=4\sqrt{5}+8i$ のとき，$\alpha^2+\bar{\alpha}^2$ と $\alpha^3+\alpha^2\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}^2+\bar{\alpha}^3$ の値を求めよ。

(2) $(x+iy)^2=4\sqrt{5}+8i$ となる実数 x，y を求めよ。

8 3 次方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。

(1) a，b を実数とし，$z=a-b\omega$ とするとき，$z\bar{z}$ を a，b で表せ。ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数である。

(2) a，b，c，d を整数とするとき，$(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)$ は，整数 X，Y で X^2+XY+Y^2 と書けることを示せ。

Hints

1 解の公式で，虚数解が現れることに注意。

2 $i^2=-1$，$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

3 A，B が実数で，$A+Bi=0$ なら，$A=B=0$

4 $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数。

5 例題2にならえ。

6 $\omega^3=1$ と $\omega^2+\omega+1=0$ を使う。

7 (1) $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数。

8 (2)は，(1)の結果を使う。

36 2次方程式

☞解答は「解説と解答」p. 149

第36講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 279〜284参照〕

1. 2次方程式の判別式と，最大・最小問題。

2. 2次方程式の解と係数の関係。

3. 2次方程式の解の位置。

例題 1

2次方程式が3つある：

$$\begin{cases} x^2-8ax+(8-8a)=0 & \cdots\cdots① \\ 20x^2-12ax+5=0 & \cdots\cdots② \\ 2x^2-6ax-9a=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

(1) 3つの方程式の中の少なくとも1つが虚数解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) 3つの方程式の中の1つだけが虚数解をもつような実数 a の範囲を求めよ。 （大東文化大）

●解答へのApproach

①の虚数解条件は

$D_1'=(4a)^2-(8-8a)=16a^2-$〔　　〕$=8$〔　　〕

$=8(a+1)$〔　　〕<0　ゆえに，　$-1<a<$〔　　〕 ……①′

②の虚数解条件は

$D_2'=(6a)^2-$〔　　〕$=4$〔　　〕$=4(3a+5)$〔　　〕<0

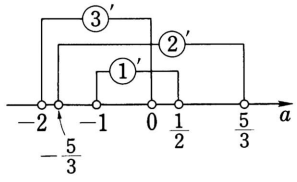
ゆえに，　$-\frac{5}{3}<a<$〔　　〕 ……②′

③の虚数解条件は

$D_3'=$〔　　〕$^2-$〔　　〕$=9a$〔　　〕<0

ゆえに，　〔　　〕 ……③′

以上を数直線上に図示すると右図。



よって，(1)の範囲は　〔　　〕$<a<$〔　　〕 ……(答)

(2)の範囲は　〔　　〕$<a\leqq$〔　　〕
と　〔　　〕$\leqq a<$〔　　〕 ……(答)

解法のPoints

← $D=b^2-4ac$ よりも $D'=(b')^2-ac$ の方が便利。

←(1)は少なくとも1本の線があればよい。
(2)はちょうど1本の線がある範囲。

←等号の扱いに注意する。

例題 2　x についての 2 次方程式　$x^2-(3k+1)x+k^2=0$ がある。

(1)　この方程式の解がすべて正であるための実数 k の条件を求めよ。

(2)　この方程式の解を α，β とし，k が(1)の条件をみたすとき，$\sqrt{\alpha}$ と $\sqrt{\beta}$ を解とする 2 次方程式を求めよ。

（都立大）

●解答への Approach

(1)　$x^2-(3k+1)x+k^2=0$　……①　について

判別式 $=(3k+1)^2-4k^2=$〔　　〕$-4k^2$

$=5k^2+$〔　　〕

$=(k+1)$〔　　〕$\geqq 0$

これより　　$k\leqq -1$ または $\left[\quad\quad\right]\leqq k$　……②

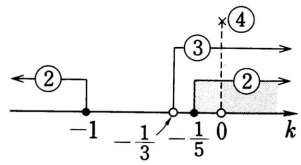
①の 2 つの解 α，β がともに正である条件は，

$\alpha+\beta=$〔　　〕>0 から　$k>-\dfrac{1}{3}$　……③

$\alpha\beta=$〔　　〕>0 から　$k\neq$〔　　〕　……④

②，③を同時にみたし，さらに④の条件を考えると，求める k の条件は

$\left[\quad\quad\right]\leqq k<0$，および〔　　〕$<k$



…(答)

(2)　$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=$〔　　〕$+2\sqrt{k^2}=$〔　　〕$+2|k|+$〔　　〕

ゆえに，　　$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{〔\quad\quad\quad\quad〕}$

$(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta})^2=\alpha\beta=$〔　　〕　から　$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{〔\quad\quad〕}=$〔　　〕

よって，$\sqrt{\alpha}$ と $\sqrt{\beta}$ を解とする 2 次方程式は，

$(x-\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\beta})=x^2-(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})x+\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=$〔　　〕$=0$

ここで，絶対値記号をはずせば，

$\left.\begin{array}{ll}\left[\quad\quad\right]\leqq k<0 \text{ のとき，} & x^2-〔\quad\quad〕=0 \\ 〔\quad\quad〕<k \text{ のとき，} & x^2-〔\quad\quad〕=0\end{array}\right\}$　…(答)

解法の Points

← $x^2+px+q=0$ の 2 解が共に正の条件は
$p^2-4q\geqq 0$，$p<0$，$q>0$

←解と係数の関係

←直接 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ は計算しにくいから，まずその 2 乗を求める。

← p，q を 2 解とする 2 次方程式は，
$(x-p)(x-q)=0$

←$|k|=\begin{cases} k & (k\geqq 0) \\ -k & (k<0)\end{cases}$

例題 3 2つの実数 x，yが関係式 $4x^2+2xy+y^2=1$ をみたすとする。そのとき，

(1) x の範囲を求めよ。　(2) yの範囲を求めよ。

(3) $2x-y$の範囲を求めよ。

(4) $kx-y=2$ をみたす実数 k の範囲を求めよ。　（武庫川女大）

●解答へのApproach

(1) $4x^2+2xy+y^2=1$ …① を y の2次方程式と考えて，

$$y^2+2xy+〔\qquad\qquad〕=0$$

判別式：　$D_y'=x^2-〔\qquad\qquad〕=〔\qquad\qquad〕\geqq 0$

よって，　$\left[\qquad\right]\leqq x\leqq\left[\qquad\right]$　……(答)

(2) ①を x の2次方程式と考えて，

$$4x^2+〔\qquad\qquad〕=0$$

判別式：　$D_x'=y^2-〔\qquad\qquad〕=〔\qquad\qquad〕\geqq 0$

よって，　$\left[\qquad\right]\leqq y\leqq\left[\qquad\right]$　……(答)

(3) $2x-y=k$ とおくと，　$y=2x-k$

これを①に代入して

$$4x^2+2x〔\qquad\qquad〕+〔\qquad\qquad〕^2=1$$

$$4x^2+4x^2-〔\qquad\qquad〕+4x^2-〔\qquad\qquad〕+k^2=1$$

$$12x^2-〔\qquad\qquad〕+k^2-1=0$$

判別式：$D_3'=〔\qquad\qquad〕^2-12(k^2-1)=〔\qquad\qquad〕-12k^2+12$

$=12-〔\qquad\qquad〕=3〔\qquad\qquad〕=-3(k+2)〔\qquad\qquad〕\geqq 0$

よって，　$〔\qquad\qquad〕\leqq k=2x-y\leqq〔\qquad\qquad〕$　……(答)

(4) $kx-y=2$　より　$y=〔\qquad\qquad〕$

これを①に代入して

$$4x^2+2x〔\qquad\qquad〕+〔\qquad\qquad〕^2=1$$

$$4x^2+2kx^2-〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕=1$$

$$〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕x^2-4(1+k)x+〔\qquad\qquad〕=0$$

判別式：$D_4'=\{2(1+k)\}^2-〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕〔\qquad\qquad〕$

$=4+8k+4k^2-〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕$

$=〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕=(k+4)〔\qquad\qquad\qquad\qquad〕\geqq 0$

よって，　$k\leqq〔\qquad\qquad〕$ または $〔\qquad\qquad〕\leqq k$　……(答)

解法のPoints

←判別式は $D'=(b')^2-ac$ で考える。

←(1)や(2)の判別式と区別するために D_3'とした。

←どれもやり方は同じだから，コツをのみこむこと。

← $k^2+2k+4=(k+1)^2+3>0$ だから，x^2の係数は0でなく，よって2次方程式。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 151）

1

(1)　$x^2-(k+1)x+k+4=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　2次方程式 $x^2+3x+k=0$ の解は虚数であるが，その解を3乗すると実数になるとき，実数 k の値を求めよ。

2

$x^2+2x+3=0$ の解を α，β とするとき，次の値を求めよ。

(1)　$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$　　(2)　$\alpha^4+\beta^4$　　(3)　$\dfrac{1}{(\alpha+5)^2}+\dfrac{1}{(\beta+5)^2}$

3

2次方程式 $x^2+ax-b=0$ …①　について

(1)　①の2つの解の差の平方が16であるとき，a と b との間に成立する関係式を求めよ。

(2)　(1)で求めた式をみたす正の整数 a，b を求めよ。

4

a，b が実数で，x の2次方程式 $(a+i)x^2+(b-2i)x+12-3i=0$ が2つの実数解をもつとき，a と b を求めよ。

5

不等式 $k(x^2+2x-1)>3x-2$ が，x のすべての値に対して成立するような k の値の範囲を求めよ。

6

次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$　　(2)　$\dfrac{5x^2+8x+5}{x^2+1}$

7

(1)　x の2次方程式 $x^2+2(2k+1)x+(k+1)=0$ が相異なる正の解をもつように，実数 k の値を定めよ。

(2)　2次方程式 $x^2-(2-a)x+1+a=0$ の2つの実数解が，ともに $-1<x<2$ の間にあるような，実数 a の範囲を求めよ。

8

2次方程式 $x^2+mx+6=0$ に関して

(1)　2つの解の差が5になるように定数 m の値を定めよ。

(2)　解が1と2の間に1つ，3と4の間に1つ存在するように m の値の範囲を定めよ。ただし，「a と b の間」というとき，その区間に a，b は含まないものとする。

Hints

1　(1)　判別式<0

(2)　虚数解を $\alpha=p+qi$，$q\neq0$ とおく。

2　解と係数の関係。

3　2解の差の平方とは $(\beta-\alpha)^2$ のこと。

4　係数が複素数だから，判別式は不可。使う原理は

$A+Bi=0 \rightarrow A=B=0$

5　絶対不等式の条件。基本事項②参照。

6　$=y$ とおいて分母をはらい，例題3にならえ。

7　基本事項⑤を使え。

8　(1)　解と係数の関係。2と同じ考え。

(2)　7と似た考えで。

37 高次方程式

☞解答は「解説と解答」p. 153

第37講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 285〜290 参照〕

1．高次方程式を因数分解で解くこと。

2．実数係数の方程式では，虚数解が対で現れること。

3．3次方程式の解と係数の関係。

例題 1 次の高次方程式を解け。

(1) $(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)=160$

(2) $x^4+x^3-x-1=0$　　(3) $2x^3+5x^2+7x-5=0$

●解答へのApproach

(1) $\{(x+2)(x-2)\}\{(x+4)(x-4)\}=160$ と考えて，

(x^2-4)〔　　〕$=160$，　x^4-〔　　〕$=160$

x^4-20x^2-〔　　〕$=0$，　(x^2-24)〔　　〕$=0$

$x^2=24$のとき，　$x=\pm\sqrt{24}=\pm2\sqrt{〔\quad〕}$

$x^2=$〔　　〕のとき，　$x=\pm\sqrt{〔\quad〕}=\pm$〔　　〕)　……(答)

(2) $x^4+x^3-x-1=(x^4-x)+$〔　　〕$=x(x^3-1)+$〔　　〕

$=(x+1)$〔　　〕

$=(x+1)(x-1)$〔　　〕$=0$

よって，　$x=\pm1$，　$x=$〔　　〕　……(答)

(3) $f(x)=2x^3+5x^2+7x-5=0$

最高次の係数は2，定数項は5だから，因数定理の候補は

$\pm1, \pm5, \pm\frac{1}{2}$，〔　　〕の8個

$f(1)=9\neq0$，$f(-1)=$〔　　〕$\neq0$，$f(5)$も$f(-5)$も0ではない。

しかし　$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+$〔　　〕$+\frac{7}{2}-5=0$

したがって，$f(x)$は$(2x-1)$で割り切れる。

$2x^3+5x^2+7x-5=(2x-1)$〔　　〕$=0$

よって，　$x=\frac{1}{2}$，$x=$〔　　〕　……(答)

解法のPoints

←積が96，差が20の2数は？

← $ax^n+\cdots+b$ に因数定理を使うには，

$\alpha=\pm\frac{b\text{の約数}}{a\text{の約数}}$

例題 2 方程式 $x^4+ax^2+2bx+5c=0$ …① が実数解と虚数解をもち，虚数解の1つは $1-2i$ である。ただし，a，b，c は実数とする。

(1) $1+2i$ が方程式①の解であることを示せ。

(2) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) b^2+c^2 の最小値を求めよ。 (川崎医大)

●解答への Approach

(1) $x=1-2i$ のとき，$x-1=-2i$，　$(x-1)^2=(-2i)^2$

$x^2-2x+1=$〔　　〕，　x^2-2x+〔　　〕$=0$

$x^4+ax^2+2bx+5c$ を (x^2-2x+5) で割った商を $Q(x)$，余りを $Ax+B$ (A，B は実数) とすると

$x^4+ax^2+2bx+5c=($〔　　〕$)Q(x)+Ax+B$ ……②

$x=1-2i$ を代入して　$0=A(1-2i)+B=$〔　　〕$-2Ai$

これより　〔　　〕$=2A=0$ となり，　$A=B=$〔　　〕

よって，②は　$x^4+ax^2+2bx+5c=($〔　　〕$)Q(x)$ ……③

$x=1+2i$ を代入すると，右辺は0となるから，これも解である。

《別解》

$1-2i$ は解だから　$(1-2i)^4+a(1-2i)^2+2b(1-2i)+5c=0$

両辺の共役複素数をとり，$(1+2i)^4+a(1+2i)^2+2b(1+2i)+5c=0$

よって，$1+2i$ も解である。

(2) ③の形から，$Q(x)=x^2+kx+c$ の形である。

$(x^2-2x+5)(x^2+kx+c)$

$=x^4+(k-2)x^3+($〔　　〕$)x^2+($〔　　〕$)x+5c$

これを③の左辺とくらべて

$k-2=0$，　〔　　〕$=a$，　〔　　〕$=2b$

ゆえに，　$k=2$，　$c=a+2k-5=a-$〔　　〕 ……③

$2b=5k-2c=5k-2($〔　　〕$)=$〔　　〕から，

$b=$〔　　〕 ……④

これより，　$Q(x)=x^2+2x+a-$〔　　〕

$Q(x)=0$ の実数解条件として　$D'=$〔　　〕$\geqq 0$

よって，　$a\leqq$〔　　〕 ……(答)

(3) ③，④から

$b^2+c^2=$〔　　〕$^2+$〔　　〕$^2=$〔　　〕a^2-〔　　〕$a+$〔　　〕

$=2\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+\left[\quad\right]$

$a\leqq 2$ だから，この最小値は $a=2$ のときで　〔　　〕 ……(答)

解法の Points

← $1-2i$ が解なら，$1+2i$ も解であることは当然だが，それを証明させる問題である。

← $x=1-2i$ は①の解だから。

← x^2-2x+5
$=(x-1+2i)(x-1-2i)$

← $\begin{cases}\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\end{cases}$

← c と b を a で表しておこう。

← 2次関数の標準形。

例題 3 実数 a と x，y，z の連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=2a \\ x^2+y^2+z^2=2 \\ x^3+y^3+z^3=2a^2(3-2a) \end{cases}$ がある。

(1) 次のおのおのの式を a の多項式で表せ。

$xy+yz+zx$，　xyz

(2) a の値にかかわらず，x，y，z のうち 1 つはある定数になる。その定数を求めよ。

(3) x，y，z がすべて正の実数であるための，a の範囲を求めよ。　（東京理大）

●解答への Approach

(1) $xy+yz+zx=\dfrac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\dfrac{〔\quad\quad〕^2-〔\quad\quad〕}{2}$

$=〔\quad\quad〕$ ……(答)

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+〔\quad\quad〕$

ゆえに，　$2a^2(3-2a)=2a\{2-〔\quad\quad〕\}+3xyz$

$3xyz=6a^2-4a^3-〔\quad\quad〕=6a^2-〔\quad\quad〕$

よって，　$xyz=〔\quad\quad〕$ ……(答)

(2) $(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-〔\quad\quad〕+(x+y+z)-1$

$=〔\quad\quad〕-(2a^2-1)+〔\quad\quad〕-1=0$

よって，$(x-1)$，$(y-1)$，$(z-1)$ のいずれかは 0 だから，x，y，z のいずれか 1 つは 〔　〕 である。 ……(答)

(3) x，y，z のうちどれが 1 でも同じことだから，$x=1$ とすると

$y+z=2a-1$，　$y^2+z^2=〔\quad\quad〕$，　$yz=〔\quad\quad〕$

よって，y，z は，次の 2 次方程式の 2 解である。

$t^2-〔\quad\quad〕t+〔\quad\quad〕=0$

この 2 つの解が正である条件として

$D=〔\quad\quad〕^2-4〔\quad\quad〕=4a^2-4a+1-〔\quad\quad〕$

$=-4a^2+〔\quad\quad〕\geqq 0$

等号なら　$a=\left[\quad\quad\right]$ だから，$\left[\quad\quad\right]\leqq a\leqq\left[\quad\quad\right]$ …①

さらに，$2a-1>0$　から　$a>\left[\quad\right]$ ……②

$2a^2-2a=2a(a-1)>0$ から　$a<〔\quad\quad〕$ または $〔\quad\quad〕<a$ ……③

①，②，③の共通範囲として，

$〔\quad\quad〕<a\leqq\left[\quad\quad\right]$ ……(答)

解法の Points

←基本事項④参照

←同上

←このとき，
$1+y^3+z^3$
$=(y+z)(y^2-yz+z^2)+1$
$=(2a-1)(1-2a^2+2a)+1$
$=6a^2-4a^3$
と自動的にみたす。

← $t^2-pt+q=0$ が正の 2 解をもつ条件は
$p^2-4q\geqq 0$，$p>0$，$q>0$

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 155）

1 次の高次方程式を解け。

(1) $8x^4-8x^2+x+1=0$

(2) $x^4-x^3-3x^2+x+2=0$

2 A，B は実数とし，i は虚数単位とする。$x^3-2x^2+Ax+B=0$ が $\dfrac{1+i}{2+i}$ を解にもつとき，他の 2 解と A，B を求めよ。

3 実数係数の方程式 $x^3+ax^2-2x+b=0$ の 1 つの虚数解が $1+\sqrt{3}i$ であるとき，a，b と実数解を求めよ。

4 3 次方程式 $2x^3-3x^2-ax-8=0$ の 3 つの解は実数で，1 つの解は他の 2 つの解の積に等しい。このとき，a の値を求めよ。（神奈川大）

5 3 次方程式 $x^3+3x^2+5x+10=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$，$\gamma+1$ を解とし，x^3 の係数が 1 であるような 3 次方程式を求めよ。（東京情報大）

6 次の連立方程式を解け。

$x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=4$，$x^3+y^3+z^3=-3$

（大阪歯大）

7 (1) $2ay^2+(a^3+3a+2)y+a^4-a^3-a+1$ を因数分解せよ。

(2) 4 次方程式 $x^4+(b-1)x^3+(2b^2+3b-1)x+2b+1=0$ が実数解をちょうど 1 個もつように実数 b を定めよ。（東海大）

8 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-4=0$ の 3 つの解を α，β，γ とし，$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおく。（n は自然数）

(1) S_1，S_2，S_3 を求めよ。

(2) α^{n+3} を α^{n+2}，α^{n+1}，α^n で表せ。また，そのことを使って S_4，S_5 の値を求めよ。（近畿大）

Hints

1 因数分解さえできれば…。

2 $\dfrac{1+i}{2+i}$ を簡単にしておこう。

3 $1+\sqrt{3}i$ が解なら，$1-\sqrt{3}i$ も解である。

4 3 つの解を α，β，$\alpha\beta$ とおく。実数解条件は

$(\beta-\alpha)^2 \geqq 0$

5 3 次方程式の解と係数の関係を使う。

6 x，y，z は，ある 3 次方程式の解である。

7 (2)で，$x \to a$，$b \to y$ とおきかえると…。

8 (1) 解と係数の関係。

(2) α がこの方程式の解であれば，$\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0$

38 複素数平面

☞解答は「解説と解答」p. 157

第38講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 291〜303 参照〕

1．複素数の絶対値，偏角，極形式を知ること。

2．複素数平面上で，複素数どうしの四則の図的解釈。

3．ド=モアブルの定理と，その応用。

1 $z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$z_2=\cos2\theta+i\sin2\theta$ $(-180^\circ<\theta<180^\circ)$，$z_3=3+\sqrt{3}i$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) z_1+z_2 の絶対値と偏角を求めよ。

(2) $(z_1+z_2)z_3$ の絶対値と偏角を求めよ。

●解答への Approach

(1) $z_1+z_2=(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

$=(\cos\theta+\cos2\theta)+i[\qquad\qquad]$

$=2\cos\dfrac{3}{2}\theta\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}+i\left[\qquad\qquad\right]$

$=2\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\qquad\qquad\right]$

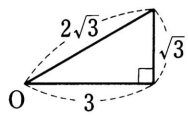
ここで　$-90^\circ<\dfrac{\theta}{2}<90^\circ$　から　$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$

よって，　$|z_1+z_2|=2\cos\dfrac{\theta}{2}$，　$\arg(z_1+z_2)=\left[\qquad\right]$　……(答)

(2) $|z_3|=|3+\sqrt{3}i|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{[\quad]}=2\sqrt{[\quad]}$　だから

$z_3=2\sqrt{[\quad]}(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$



ゆえに，

$(z_1+z_2)z_3=4\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\qquad\qquad\right]$

これより，　$|(z_1+z_2)z_3|=\left[\qquad\right]$　……(答)

$\arg\{(z_1+z_2)z_3\}=\left[\qquad\right]$　……(答)

解法の Points

← $\cos A+\cos B$
$=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

←これにより，上の式は極形式である。

←まず極形式で表す。

←極形式での積。

例題 2 次の条件をみたす三角形の形状を求めよ。

(1) $\dfrac{\cos A+i\sin A}{(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)}$ が実数に等しいときの △ABC

(2) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ をみたす複素数上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形。

●解答への Approach

(1) $\dfrac{\cos A+i\sin A}{(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)}=\cos(A-B-C)+i\sin$〔　　〕

これが実数に等しいとき，

$\sin$〔　　〕$=0$，〔　　〕$=180^\circ\times n$　(n は整数)

ここで，A，B，C は三角形の角だから

$-180^\circ=-(A+B+C)<A-B-C<180^\circ-0-0=180^\circ$

よって，　$A-B-C=0$，　$A=B+C$

すなわち，この △ABC は，

〔　　〕を直角とする直角三角形である。　……(答)

(2) α，β は三角形の頂点を表すから　$\alpha\neq\beta$

よって，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$　と

$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)=$〔　　〕$=0$　とは同値である。

ゆえに，　$\alpha^3=\beta^3$，　$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^3=1$

ここで，$\dfrac{\alpha}{\beta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおいて，上の関係に代入すると

r^3〔　　〕$=1$　　これより　$r=1$

また，$3\theta=360^\circ\times n$ から　　$\theta=$〔　　〕

$\alpha\neq\beta$ だから　　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\cos(\pm$〔　　〕$)+i\sin(\pm$〔　　〕$)$

$|\alpha|=|\beta|$，$\arg\alpha-\arg\beta=\theta=$〔　　〕　だから

0，α，β の表す点を O，A，B とすると，△OAB は，

OA＝OB で，∠AOB＝〔　　〕° となる二等辺三角形である。(答)

解法の Points

←極形式の積と商の計算規則から。

←$180^\circ<180^\circ\times n<180^\circ$ から
$n=0$

←ド＝モアブルの定理

←

例題 3 次の 4 次方程式を解け。

$$z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$$

●解答への Approach

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，

ド=モアブルの定理により，　$z^4=$〔　　〕

また，

$|8(-1+\sqrt{3}i)|=|8||-1+\sqrt{3}i|=|8|\sqrt{1^2+3}=$〔　　〕 だから，

極形式で表すと，　$8(-1+\sqrt{3}i)=$〔　　〕

すなわち，与えられた方程式は

r^4〔　　〕$=16$〔　　〕

これより，　$r^4=$〔　　〕，　$4\theta=$〔　　〕$^\circ+360^\circ\times n$

$r=$〔　　〕，　$\theta=$〔　　〕$^\circ+90^\circ\times n$

ゆえに，

$z=$〔　　〕{cos〔　　〕$+i$sin〔　　〕}

$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

$n=0$ のとき：

$z=2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)=$〔　　〕

$n=1$ のとき：

$z=2$〔　　〕

$=$〔　　〕

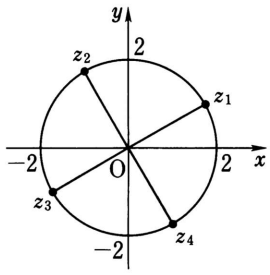
$n=2$ のとき：

$z=2$〔　　〕

$=$〔　　〕

$n=3$ のとき：

$z=2$〔　　〕$=$〔　　〕　……(答)



解法の Points

← $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$
$=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ なら，
$r_1=r_2$，$\theta_1=\theta_2+360^\circ\times n$

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 159）

1 $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ のとき，$z+z^2+z^3$ が実数となる φ を，$0^\circ\leqq\varphi<360^\circ$ で求めよ。

2 $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta-i\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}$ を簡単にせよ。

3 $\left|\dfrac{z-1}{z}\right|=\dfrac{1}{2}$，　$\arg\left(\dfrac{z-1}{z}\right)=60^\circ$ を同時にみたす複素数を求めよ。

4 α，β は複素数で $|\alpha|<1$，$|\beta|<1$ のとき，$|\alpha-\beta|$ と $|1-\bar{\alpha}\beta|$ の大小を求めよ。

5 a が実数で，複素数 $z=\dfrac{(1+i)^3(a-i)^2}{\sqrt{2}(a-3i)^2}$ がある。$|z|=\dfrac{2}{3}$ のとき，

(1) z の偏角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq360^\circ$ とする。

(2) z^n が実数となるような正の整数 n の最小値，およびそのときの z^n の値を求めよ。

6 複素数平面上で，点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の点はどんな図形上を動くか。

(1) $w=1+iz$　　(2) $w=\dfrac{1-i}{z}$　　(3) $w=\dfrac{1+iz}{1+z}$

7 複素数平面上で，z，$(1+i)z$，原点を結んでできる三角形は，直角三角形であることを示せ。

8 方程式 $x^6-64=0$ の解を，複素数平面上に図示せよ。

9 $z=\cos18^\circ+i\sin18^\circ$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $1+z+z^2+\cdots+z^{19}$　　(2) $1\cdot z\cdot z^2\cdot\cdots\cdot z^{19}$

10 n が 10 未満の自然数のとき，$a^n=(-1+\sqrt{3}i)^n$ の値が実数となるような n の値と，そのときの a^n の値を求めよ。

Hints

1 虚数部分を 0 とおくと，三角方程式。

2 このまま通分してもよいが，各項を極形式に変形して計算してもよい。

3 $\dfrac{z-1}{z}=\dfrac{1}{2}(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$

4 2 乗して，$|z^2|=z\bar{z}$ を使ってくらべよ。

5 $\begin{cases}\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta\\ |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|\end{cases}$ など。

6 まず，それぞれの式を z について解くとわかりやすくなる。

7 三角形の，各頂点間の距離がわかればよい。

8 二項方程式。基本事項の⑤参照。

9 (1)は等比数列の和。
(2)は等差数列の和。

10 $-1+\sqrt{3}i$ を極形式で表すことから始めよう。

39 条件つき確率

☞解答は「解説と解答」p. 161

第39講座
数学B

■この講座のねらい■ 〔「数学αの完全整理」p. 304〜311 参照〕

1．条件つき確率の考えと，一般の積の規則を知る。

2．2つの事象が互いに独立，または従属ということを理解する。

3．独立試行の法則の使い方に習熟する。

例題 1 1から6までの番号のついた6個の箱があり，k 番の箱には白球 k 個と赤球 $6-k$ 個が入っている。正しくつくられたサイコロを投げて，出た目に等しい番号の箱から1個の球を無作為にとり出す。

(1) 4の目が出て，かつ白球がとり出される確率を求めよ。

(2) 偶数の目が出て，かつ白球がとり出される確率を求めよ。

(3) 偶数の目が出たという条件のもとで，白球がとり出される条件つき確率を求めよ。

（東北学院大）

●解答へのApproach

(1) 4の目の出る確率は〔　　〕，4番目の箱には白球4個，赤球〔　　〕個

よって，この箱から白球の出る確率は〔　　〕

求める確率は，これらの積として

〔　　〕×〔　　〕=〔　　〕 ……(答)

(2) 2の目，4の目，6の目について，それぞれ(1)同様に考えて，

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\left[\quad\right]+\frac{1}{6}\times\left[\quad\right]=\frac{\left[\quad\right]}{36}=\frac{\left[\quad\right]}{36}$$

$$=\left[\quad\right]$$ ……(答)

(3) 偶数の目が出る確率を $P(E)$，

偶数の目が出たという条件のもとで白球の出る確率を $P_E(W)$，

偶数の目が出て，しかも白が出るという確率を $P(E\cap W)$ と表すと，

$$P(E)\times P_E(W)=P(E\cap W)$$

$P(E)=\frac{1}{2}$，(2)より $P(E\cap W)=\left[\quad\right]$ だから，

$$P_E(W)=\left[\quad\right]$$ ……(答)

解法のPoints

←これも条件つき確率。
（4が出るという条件下で白が出る）

←これが確率の積の法則。

例題 2 1つのサイコロを1回振るとき，次の事象を考える。

A： 偶数の目が出る。

B： k 以下（$1 \leqq k \leqq 6$）の目が出る。

このとき，A と B とは独立か従属かを，それぞれの k について調べよ。

●解答への Approach

$P(A)=\frac{3}{6}=$〔　　〕だから，$P_B(A)$ を個々の k について調べてみよう。

A に属する事象は $\{2,\ 4,\ 6\}$ だから，　　$n(A)=3$

← $n(A)$ は A に属する事象の個数。

$k=1$ のとき，1以下の偶数はなく，

$n(A \cap B)=0$

$k=2$ のとき，2以下の偶数は $\{2\}$ のみで

$n(A \cap B)=1$

$k=3$ のとき，3以下の偶数は $\{2\}$ のみで

$n(A \cap B)=$〔　　〕

$k=4$ のとき，4以下の偶数は $\{2,\ 4\}$ で

$n(A \cap B)=$〔　　〕

$k=5$ のとき，5以下の偶数は〔　　〕で

$n(A \cap B)=$〔　　〕

$k=6$ のとき，6以下の偶数は〔　　〕で

$n(A \cap B)=$〔　　〕

$$P_B(A)=\frac{n(A \cap B)}{n(B)}=\frac{n(A \cap B)}{k}$$

← B に属す事象は $\{1,\ 2 \cdots,\ k\}$ の k 個。

これが　$P(A)=\frac{1}{2}$　に等しいのは　$k=$〔　　〕のときである。

よって，　$\begin{cases} k=〔　　〕 \text{ のとき } A \text{ と } B \text{ は独立} \\ k=〔　　〕 \text{ のとき } A \text{ と } B \text{ は従属} \end{cases}$　……(答)

解法の Points

例題 3 A，B の 2 人が硬貨を，A は 4 回，B は 5 回投げるものとする。

(1) A が表を 3 回出し，B が表を 2 回出す確率を求めよ。

(2) A と B が表を同じ回数出しているときに，A が 2 回続けて裏を出している確率を求めよ。

(3) A が表を出す回数よりも B が表を出す回数のほうが多い確率を求めよ。 (名古屋市大)

●解答への Approach

(1) A が 4 回中 3 回，B が 5 回中 2 回表を出せばよいから

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{2^4}\times\frac{10}{2^5}=\left[\quad\right]$$ ……(答)

← 独立試行の法則

(2) A と B が同回数の表を出す確率は，その回数が 0, 1, 2, 3, 4 のときで，

$$P_S=({}_4C_0\cdot{}_5C_0+{}_4C_1\cdot{}_5C_1+{}_4C_2\cdot{}_5C_2+{}_4C_3\cdot{}_5C_3+{}_4C_4\cdot{}_5C_4)\times\frac{1}{2^9}$$

$$=\frac{1\times1+4\times5+6\times10+4\times10+1\times5}{2^9}=\frac{\left[\quad\right]}{2^9}$$

← (1)同様の考えであるが，$\frac{1}{2^9}$ がすべての項に共通である。

このうち，A が 2 回続けて裏を出すのは，A の表が 0 回または 1 回のときはそのすべて，A の表が 2 回のときは表表裏裏，表裏裏表，裏裏表表の 3 回だから，この確率は

$$P_U=({}_4C_0\cdot{}_5C_0+{}_4C_1\cdot{}_5C_1+3\cdot{}_5C_2)\times\frac{1}{2^9}=\frac{1\times1+4\times5+3\times10}{2^9}=\left[\quad\right]$$

よって，求める確率は $\dfrac{P_U}{P_S}=\left[\quad\right]=\left[\quad\right]$ ……(答)

← 条件つき確率

(3) B の表の回数が A の表の回数よりも多いのは，B の表の回数で分類して場合の数を考えると

$${}_5C_5\cdot2^4+{}_5C_4({}_4C_3+{}_4C_2+{}_4C_1+{}_4C_0)+{}_5C_3({}_4C_2+{}_4C_1+{}_4C_0)$$
$$+{}_5C_2({}_4C_1+{}_4C_0)+{}_5C_1\cdot{}_4C_0$$
$$=1\cdot16+5(4+6+4+1)+10(6+4+1)+10(4+1)+5\cdot1$$
$$=16+75+110+\left[\quad\right]+\left[\quad\right]=\left[\quad\right]$$

← ${}_4C_4+{}_4C_3+{}_4C_2+{}_4C_1+{}_4C_0=2^4$

よって，求める確率は $\dfrac{\left[\quad\right]}{2^9}=\left[\quad\right]$ ……(答)

解法の Points

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 163）

1 10本のくじの中に2本の当たりくじがある。当たりくじを2回引くまでくり返してくじを引くものとする。ただし，一度引いたくじは元にもどす。n 回目で終わる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。

(2) 5回目で終わったとき，3回目に当たるくじを引いている確率を求めよ。

(3) p_n が最大となる n を求めよ。

2 さいころを6回投げるとき，同じ目が6回続けて出る確率 p_1，1から6までの目がちょうど1回ずつ出る確率 p_2，および，1と2の目がそれぞれ3回ずつ出る確率 p_3 を求めよ。

3 正しいものには○，正しくないものには×をつける○×式の問題が10題ある。○印と×印をでたらめにつけるとき，少なくとも3問が正解となる確率を求めよ。

4 ある競技で，2人がゲームを数回重ね，先に3回勝った方が優勝とする。A，Bが対戦したとき，各回のゲームでAが勝つ確率が P であるとき，Aが優勝する確率を求めよ。

5 平面上で点Aは原点を出発し，サイコロを投げて奇数が出ればその数だけ右へ進み，偶数が出ればその数だけ上へ進む。サイコロを4回投げたとき，Aの座標が（8，8）となる確率を求めよ。

6 10本中3本当たるくじがある。A，Bの順序で引くとき，Aが当たる事象とBが当たる事象は独立か，それとも従属か。

7 ある工場で大量に生産される部品の不良品の確率は p である。この部品の3個中不良品が高々1個の確率を p_1，6個中不良品が高々2個の確率を p_2 とするとき，$p_2<p_1$ となる p の範囲を求めよ。

8 3つの互いに独立な事象 A，B，C があり，$P(A)=0.5$，$P(A\cap B\cap C)=1-P(A\cup B\cup C)=0.12$ である。

A，B，C のうち，1つだけが起こる確率を求めよ。

Hints

1 n 回目で終わるとは，初めの $(n-1)$ 回で当たりくじが1回とはずれくじが $(n-2)$ 回出て，n 回目に当たりくじを引くこと。

2 場合の総数は 6^6 通り。分子はそれぞれの場合の数。

3 1問につき，正解も不正解も，確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

4 Aの勝った回数で分類して考える。

5 座標が（8，8）だから，奇数が2回，偶数が2回出ている。

6 $P(B)$ と $P_A(B)$ が等しいか，または異なるか。

7 独立試行の法則で，まず p_1，p_2 を求めよ。

8 $P(A\cup B\cup C)$
$=P(A)+P(B)+P(C)$
$-P(A\cap B)-P(B\cap C)$
$-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

40 確率分布

☞解答は「解説と解答」p. 165

第40講座
数学B

■この講座のねらい■　〔「数学αの完全整理」p. 312〜319 参照〕

1．独立試行の法則を理解する。

2．確率分布（二項分布も含む）の意味を知る。

3．平均や分散の計算になれる。

例題 1　サイコロを1回投げ，出た目の数を X とする。$X=2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，$Z=2X$ とおく。$X=1,\ 6$ のとき，もう一度サイコロを投げ，出た目の数を Y とし $Z=X+Y$ とおく。

(1)　$Z>6$ となる確率を求めよ。

(2)　Z の期待値を求めよ。

●解答へのApproach

(1)　$Z>6$ となるには，次の3つの場合がある。

$X=4$ または $X=5$ が出て，$Z=2X$ としたとき。

$X=1$ が出て，次に $Y=6$ が出たとき。

$X=6$ が出たとき。

以上の確率を加えて，

$$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\left[\qquad\right]$$ ……(答)

(2)　$2\leqq Z\leqq 12$ となるので，それぞれの場合の確率 P を計算すると

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$	〔　〕	〔　〕	〔　〕	〔　〕

よって，求める期待値は

$$\frac{1}{36}(2\times1+3\times1+4\times7+5\times1+6\times7+7\times2+8\times7$$
$$+\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right])$$
$$=\frac{1}{36}(2+3+28+5+42+14+56+\left[\qquad\qquad\right])$$
$$=\left[\qquad\right]$$ ……(答)

解法のPoints

←このとき，$1\leqq Y\leqq 6$ だから，$Z=X+Y>6$ となる。

← $Z=2$ は，$X=Y=1$ のとき。
$Z=4$ は，$X=2$ または $X=1,\ Y=3$ のとき。
以下同様に考える。

例題 2 1から6までの目の出る確率が同じでないかたよったサイコロがある。このサイコロを振るとき，n の目の出る確率 p_n $(1 \leqq n \leqq 6)$ は $p_n = nc$ で与えられるという。
ただし c は定数である。

(1) c の値を求めよ。

(2) このサイコロを1回振るとき，出る目の数の期待値と分散を求めよ。

(3) このサイコロを2回振るとき，出る目の和が10となる確率を求めよ。

●解答へのApproach

(1) すべての確率の和は1でなくてはいけないから

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = c + 2c + 3c + 4c + 5c + 6c$$

よって，　〔　　〕$c = 1$ から　$c = \boxed{\quad}$　……(答)

(2) 確率分布表は

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	〔　〕	〔　〕	〔　〕	〔　〕

期待値：$E(X) = \dfrac{1 \times 1 + 2 \times 2 + 〔\qquad\qquad〕}{21}$

$= \boxed{\quad}$　……(答)

$E(X^2) = \dfrac{1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 〔\qquad\qquad〕}{21}$

$= 〔\quad〕$

分散：$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \boxed{\quad}$　……(答)

(3) (2)で得た確率分布表を利用する。

目の和が10になるのは 4+6，5+5，6+4 のいずれか。

それぞれの場合の確率は，(2)の確率の積の規則で計算できる。

〔　〕×〔　〕+〔　〕×〔　〕+〔　〕×〔　〕

$= \boxed{\quad}$　……(答)

解法のPoints

←確率分布表の性質

←重要公式！
$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2}$

例題 3　サイコロを n 回投げて，6 の目が r 回出れば，ar^2+br+c (a，b，c は定数で $a>0$) の金額が得られるものとする。得られる金額の平均値(期待値) m と $\dfrac{an^2}{36}+\dfrac{bn}{6}+c$ のどちらが大きいか。

●解答への Approach

サイコロを n 回投げて，6 の目が r 回出る確率を P_r とすると，

$$P_r=P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{n-r}$$

$$m=\sum_{r=0}^{n}(ar^2+br+c)P_r$$

$$=a\sum_{r=0}^{n}r^2P_r+b\Big[\qquad\qquad\Big]+c\Big[\qquad\qquad\Big]\quad\cdots\cdots①$$

ここで，二項分布の公式より

$$\sum_{r=0}^{n}rP_r=E(X)=np\quad\left(p=\frac{1}{6},\ q=1-p\right)$$

$$npq=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

よって，　$\displaystyle\sum_{r=0}^{n}r^2P_r=E(X^2)=npq+\{E(X)\}^2=npq+(np)^2$

$p=\dfrac{1}{6}$，$q=\Big[\qquad\Big]$ を代入して，

$$\sum_{r=0}^{n}r^2P_r=\Big[\qquad\qquad\Big]$$

以上より，①の値は次のようになる。

$$m=a\cdot\Big[\qquad\qquad\Big]+b\cdot\Big[\qquad\Big]+c$$

$$=\frac{an^2}{36}+\frac{bn}{6}+c+\Big[\qquad\Big]>\frac{an^2}{36}+\frac{bn}{6}+c$$

(答)　m の方が大きい。

解法の Points

←独立試行の法則

←公式から逆に $E(X^2)$ を出してしまう。

←$\displaystyle\sum_{r=0}^{n}P_r=1$ に注意。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 167）

1 1から5までの数字を1つずつ記入した5枚のカードがある。この中から無作為に1枚を抜きとり，元にもどさずにまた1枚抜きとる。このとき，カードの数字の和の平均を求めよ。

2 2つの均質なサイコロを用意し確率変数 X を次のように定める。2つのサイコロを投げ，目の和 x が $x \geqq 6$ のとき $X=1$，$x \leqq 5$ のとき $X=2x$ とおく。このとき，X の期待値を求めよ。

3 サイコロを2回続けて投げるとき，出た目の差の絶対値を X とする。X の期待値と標準偏差を求めよ。

4 赤，青，黄，緑の4色の球がそれぞれ2個ずつ入った袋から同時に4個の球をとり出したとき，その中に現れる色の種類の数を確率変数 X で表す。X の確率分布と期待値を求めよ。

5 確率変数 X の期待値は1で，分散は3である。このとき確率変数 $Y=2X-3$ の期待値 $E(Y)$ は $\boxed{}$，分散 $V(Y)$ は $\boxed{}$ である。
また，実数 x に対して $F(x)=P(X \leqq x)$ とおいたとき，$P(Y \leqq -2)$ を F を用いて表すと $\boxed{}$ である。

6 確率変数 X の期待値は540，分散は8100である。a，b は定数として $Y=aX+b$ で定まる確率変数 Y の期待値が50，標準偏差が10になるような a，b の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

7 5枚の硬貨を同時に投げる。2枚のみが表で他の3枚はすべて裏である事象を A とする。ただし，どの硬貨も表が出る確率は 0.5 である。
(1) 1回の試行によって，A が起こる確率を求めよ。
(2) 5枚の硬貨を同時に投げる試行を4回くり返して行うとき，A が起こる回数 X の期待値と標準偏差を求めよ。

8 平均値が6，分散が2の二項分布に従う確率変数を X とする。
$X=k$ となる確率を P_k とおく。$\dfrac{P_4}{P_3}$ を求めよ。

Hints

1 $3 \leqq$ 数字の和 $\leqq 9$

2 X はどのような数をとることができるか。

3 $0 \leqq X \leqq 5$
それぞれの場合の数を求める。

4 場合の総数は ${}_8C_4$

5 $E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2V(X)$

6 標準偏差：
$\sigma=\sqrt{V(X)}$

7 これは二項分布である。

8 二項分布の公式から，まず n と p を求めよ。