講座内容／目次

さくらの個別指導
H25.03.13
さくら教育研究所

数学Ⅲ

第１講座　分数関数・無理関数 ―― 1
第２講座　三角関数と合成関数・逆関数 ―― 5
第３講座　数列の極限 ―― 9
第４講座　無限級数 ―― 13
第５講座　関数の極限 ―― 17
第６講座　微分法 ―― 21
第７講座　接線と法線 ―― 25
第８講座　極限とグラフの凹凸 ―― 29
第９講座　最大値・最小値 ―― 33
第10講座　微分法の応用 ―― 37
第11講座　積分法 ―― 41
第12講座　面　積 ―― 45
第13講座　体積・長さ ―― 49
第14講座　定積分の応用 ―― 53
第15講座　微積分融合問題 ―― 57

数学C

第16講座　行列と連立１次方程式 ―― 61
第17講座　放物線・楕円・双曲線 ―― 65
第18講座　曲線の媒介変数表示・極座標表示 ―― 69
第19講座　数値計算 ―― 73
第20講座　統計処理 ―― 77

1 ―――― 分数関数・無理関数

☞解答は「解説と解答」p. 4

第1講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 6〜13 参照〕

1．分数関数に慣れる。
2．分数関数を通しての平行移動・対称移動
3．曲線の漸近線
4．無理関数と2次関数の関係
5．無理関数を通しての平行移動・対称移動

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　$y=\dfrac{4x+1}{x-7}$ は $y=\dfrac{7x+1}{x-4}$ を x 軸の方向に $\boxed{}$，y 軸の方向に $\boxed{}$ 平行移動したものである。

（川崎医大）

(2)　2点 (2, 3)，(3, 2) を結ぶ線分と $y=\sqrt{mx+3}$ のグラフ $(m>0)$ が交わるような m の範囲は $\boxed{} \leqq m \leqq \boxed{}$ である。

（金沢医大）

●解答への Approach

(1)　$\dfrac{4x+1}{x-7}=[\qquad]+\dfrac{[\qquad]}{x-7}$，　$\dfrac{7x+1}{x-4}=[\qquad]+\dfrac{[\qquad]}{x-4}$

よって，平行移動の定義から，x 軸の方向に〔　　〕，y 軸の方向に〔　　〕平行移動したものである。

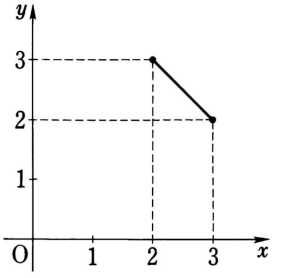
答　（順に）〔　　〕，〔　　〕

(2)　$y=\sqrt{mx+3}$ のグラフを，端点 (2, 3) と (3, 2) を通るときを考える。

$[\qquad] \geqq \sqrt{[\qquad]\cdot m+3}$

$[\qquad] \leqq \sqrt{[\qquad]\cdot m+3}$

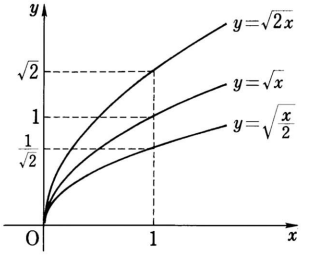
$\therefore\ [\qquad] \leqq m \leqq [\qquad]$　……答



解法の Points

← $\dfrac{ax+b}{cx+d}=A+\dfrac{B}{cx+d}$ の形に変形する。ここで，A，B は定数である。

←



例題2 関数 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ ……① について，次の問いに答えよ。

(1) ①は $\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{A}{x-1}+B$ のように変形できる。定数A，Bの値を求めよ。

(2) ①のグラフを xy 平面上にかけ。

(3) ①のグラフと直線 $y=3$ および $y=-3$ との交点の x 座標を順に x_1，x_2 とする。x_1 と x_2 の値を求めよ。

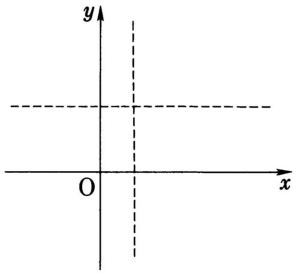
(4) 不等式 $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|<3$ をみたす x の値の範囲を求めよ。 （東日本大-歯）

●解答への Approach

(1) $\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-[\quad])+[\quad]}{x-1}=\dfrac{[\quad]}{x-1}+[\quad]$

答 $A=[\quad]$，$B=[\quad]$

(2)



(3) (i) $3=\dfrac{[\quad]}{x-1}+[\quad]$ ∴ $\dfrac{[\quad]}{x-1}=[\quad]$

∴ $x-1=[\quad]$ ∴ $x=[\quad]$

(ii) $-3=\dfrac{[\quad]}{x-1}+[\quad]$ ∴ $\dfrac{[\quad]}{x-1}=[\quad]$

∴ $[\quad]x=4$ ∴ $x=\left[\quad\right]$

よって，(i)，(ii)から，

$x_1=[\quad]$，$x_2=\left[\quad\right]$ ……答

(4) ①と与不等式から

$|y|<[\quad]$ ∴ $[\quad]<y<[\quad]$

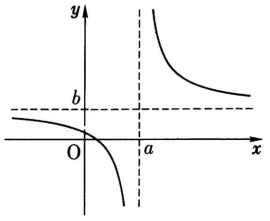
よって，(2)のグラフと(3)から

$x<\left[\quad\right]$，$[\quad]<x$ ……答

解法の Points

← $\begin{array}{r} 2 \\ x-1\overline{)2x-1} \\ \underline{2x-2} \\ 1 \end{array}$

← $y=\dfrac{1}{x-a}+b$ のグラフ



← $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|<3$

$\Longleftrightarrow \left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|^2<3^2$

∴ $(2x-1)^2<9(x-1)^2$

∴ $5x^2-14x+8>0$

∴ $(5x-4)(x-2)>0$

例題3 2つの関数 $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$, $y=ax-1$ を $x\geqq 0$ において考える。ただし，$[x]$ は x をこえない最大の整数（すなわち $m\leqq x<m+1$ をみたす整数m）を表す記号である。

(1) $y=[x]-\sqrt{x-[x]}$ のグラフの $0\leqq x<4$ の部分をかけ。

(2) $x\geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が1個であるような a の値の範囲を求めよ。

(3) $x\geqq 0$ において，2つの関数のグラフの交点が n 個（$n\geqq 2$）であるような a の値の範囲を求めよ。

（慶大-経済）

●解答への Approach

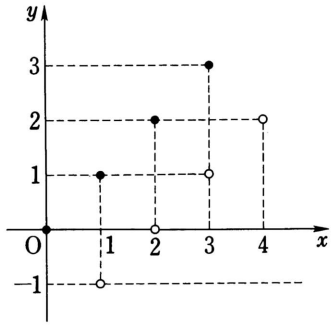
(1) $0\leqq x<1$ のとき，$y=[\quad\quad]-\sqrt{x-[\quad\quad]}$

$1\leqq x<2$ のとき，$y=[\quad\quad]-\sqrt{x-[\quad\quad]}$

$2\leqq x<3$ のとき，$y=[\quad\quad]-\sqrt{x-[\quad\quad]}$

$3\leqq x<4$ のとき，$y=[\quad\quad]-\sqrt{x-[\quad\quad]}$

答



(2) $y=ax-1$ は，$(0,\ -1)$ を通り，傾きが a であるから，(1)のグラフから

$[\quad\quad]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$, $a>[\quad\quad]$ ……答

(3) 交点が2個；$\left[\quad\quad\right]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$, $\left[\quad\quad\right]<a\leqq[\quad\quad]$

交点が3個；$\left[\quad\quad\right]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$, $\left[\quad\quad\right]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$

一般に，交点が n 個であるような a の値の範囲は

$\left[\quad\quad\right]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$, $\left[\quad\quad\right]<a\leqq\left[\quad\quad\right]$ ……答

解法の Points

← $x=n+t$

（n は整数，$0\leqq t<1$）のとき：

$[x]-\sqrt{x-[x]}$

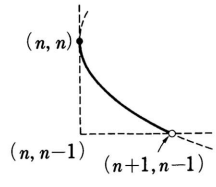
$=n-\sqrt{n+t-n}$

$=n-\sqrt{t}$

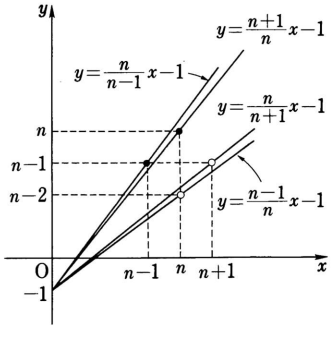
$n\leqq x<n+1$ のとき：

$y=[x]-\sqrt{x-[x]}$

のグラフは



←



トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 6)

1 $y=-\dfrac{6x+1}{2x-1}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものが関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフになるとき，p，q および k の値を求めよ。

(独協医大)

2 a，b を定数として曲線 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$ が 2 点 $\mathrm{A}\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}(-2, 3)$ を通るとき，$a=\square$，$b=\square$ であり，漸近線は $x=\square$，$y=\square$ の 2 つである。さらに，この曲線と x 軸との交点の x 座標は $\square$，y 軸との交点の y 座標は $\square$ である。

(東京理大)

3 方程式 $\dfrac{1}{x^2+1}=k$（k：定数）は $k=a$ のとき解は b 個，$0<k<a$ のとき解は c 個である（ただし，b，c は 0 でない）。a，b，c の値を求めよ。

(関西医大)

4 x を正の実数とするとき，

(1) $t=x+\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-6x-\dfrac{6}{x}+12$ を t で表せ。

(3) x に関する方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数を求めよ。ただし，a は実数とする。またもし重解があればその個数は 1 とせよ。 (川崎医大)

5 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ は $x=\square$ で最大値 $\square$ をとり，$x=\square$ で最小値 $\square$ をとる。

(上智大-法)

6 $x>0$ のとき $1<\sqrt{1+x}<1+x$ が成り立つことを示せ。

(群馬大-医・教育)

7 $0<x<1$ に対して，$\dfrac{1-x^3}{3}>\dfrac{1-x^2}{2}\sqrt{x}$ を証明せよ。 (京大-文系)

8 2 つの関数 $y=\sqrt{1-x^2}$，関数 $y=x+|x-k|$ のグラフが，2 点を共有するような実数 k の範囲を求めよ。

(早大-商)

9 $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x^2}$ とする。このとき，次に答えよ。

$f(x)$ の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$f(x)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

Hints

1 $y=\dfrac{a}{x-\alpha}+\beta$ は $y=\dfrac{a}{x}$ を x 軸の方向に α，y 軸の方向に β だけ平行移動したもの。

2 $y=\dfrac{a}{x-\alpha}+\beta$ の漸近線は $x=\alpha$，$y=\beta$ である。

3 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解が実数であるための必要十分条件は

$$b^2-4ac\geqq 0$$

4 $a>0$，$b>0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

等号は $a=b$ で成立。

5 $(y-1)x^2-(y+1)x+y+1=0$ の x の実数解条件。

6 $a>1$，$b>1$ のとき，

$$a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2$$

7 $\sqrt{x}=t$ とおき，微分法を利用する。

8 ここでの 2 点は異なる 2 点とする。

9 $\dfrac{1-x}{2+x^2}=k$ とおくと

$$kx^2+x+2k-1=0$$

の x の実数解条件。

2 ―――― 三角関数と合成関数・逆関数

☞解答は「解説と解答」p. 9

第2講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 14〜19 参照〕

1．角の大きさを表す従来の度数法の他に弧度法があることを知る。
2．三角関数の微積分で用いられる弧度法に慣れる。
3．微積分で重要な合成関数に慣れる。
4．概念としてむずかしい逆関数をしっかり理解しておく。
5．三角関数や合成関数の複雑さに慣れる。

例題 1　x についての2次方程式 $x^2-2ax+(a^2-2)=0$ が2つの実数解 $\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ をもつとき，次の問いに答えよ。ただし，a は正の定数である。

(1)　θ および a の値を求めよ。

(2)　n を正の整数として，$(12n+5)\theta$ の余弦および正接の値を求めよ。　（岐阜薬大）

●解答への Approach

(1)　解と係数の関係から

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=[\qquad] \quad\cdots①\qquad \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}=[\qquad] \quad\cdots②$$

①と②から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を消去すると

$$a^2([\qquad])=0$$

$$\therefore\quad a=[\qquad]\quad(\because\quad a>0)\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

このとき，

$$\sin\theta\cos\theta=\left[\qquad\right]\qquad\therefore\quad\sin2\theta=\left[\qquad\right]$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から　　$\theta=\left[\qquad\right]$　……答

(2)　$\alpha=(12n+5)\theta=n\pi+\left[\qquad\right]\pi$

$\therefore\quad\tan\alpha=[\qquad]$　……答

$\therefore\quad\cos\alpha=[\qquad]\cos\left(\left[\qquad\right]\right)$

$=[\qquad]\left(\left[\qquad\right]\right)$　……答

解法の Points

←

度	180°	90°	60°	45°	30°
ラジアン	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

←$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

←$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

←$\frac{5}{12}\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

←$\sin(x+y)$
$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
$\cos(x+y)$
$=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

例題2 a は正の実数とする。

$$f(x)=-x^2+2ax,\ g(x)=x+\frac{a}{x}$$ とする。

(1) $x>0$ における $g(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) x の関数 $f(g(x))$ の $x>0$ における最大値を求めよ。 (日本医大)

●解答への Approach

(1) $a>0,\ x>0$ であるから，〔　　〕平均と相乗平均の関係によって，

$$g(x)=x+\frac{a}{x}\geqq[\quad\quad]\sqrt{[\quad\quad]\cdot[\quad\quad]}$$

$$\therefore\ g(x)\geqq 2\sqrt{[\quad\quad]}$$

等号は $x=$〔　　〕のとき成り立つ。

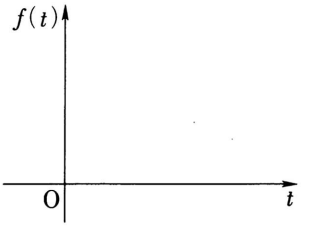
また，$x\to+\infty$ のとき，$g(x)\to$〔　　〕であるから

$$g(x)\geqq[\quad\quad]\sqrt{[\quad\quad]}$$ ……答

(2) $g(x)=t$ とおくと，

$$f(g(x))=f(t)=-t^2+2at=-([\quad\quad])^2+[\quad\quad]$$

$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる。



ここで，$y=f(t)$ が最大値をとる点と(1)の $g(x)$ の最小値の大小を調べる。

$$[\quad\quad]\sqrt{[\quad\quad]}-[\quad\quad]$$
$$=[\quad\quad]([\quad\quad]-[\quad\quad])$$

$\therefore$ $a<4$ ならば 〔　　〕<〔　　〕

$a\geqq4$ ならば 〔　　〕≦〔　　〕

また，　$f(a)=a^2,\ f(2\sqrt{a})=-4a+4a\sqrt{a}$

よって，$f(g(x))$ の最大値は

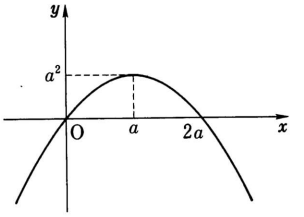
$$\begin{cases} 0<a<4 \text{ のとき } [\quad\quad] \\ a\geqq4 \text{ のとき } [\quad\quad] \end{cases}$$ ……答

解法の Points

←$a>0,\ b>0$ のとき，
$a+b-2\sqrt{ab}$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq0$
$\therefore\ \dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
(相加平均)≧(相乗平均)
等号は $a=b$ で成り立つ。

←$f(g(x))$
$=-\{g(x)\}^2+2ag(x)$
$=-\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^2+2a\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$

$y=-x^2+2ax$
$=-x(x-2a)$
$=-(x-a)^2+a^2$



例題3 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（ただし $ad-bc<0$）について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ とその逆関数が等しいための条件を求めよ。

(2) (1)のような $f(x)$ で，$f(u)=u$ となるような u が2点あるための条件をいえ。またそのとき，その2点の中点 m を求めよ。 （産業医大）

●解答への Approach

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ とおいて，x を y で表すと，

$$x=\frac{[\quad\quad]y+[\quad\quad]}{[\quad\quad]y+[\quad\quad]}$$

よって，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x)=\frac{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}$$

$f(x)=f^{-1}(x)$ となるのは $f(f(x))=x$ である。この左辺については

$$f(f(x))=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\frac{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}$$

よって，
$$\begin{cases}[\quad\quad]=[\quad\quad]=0 & \cdots\cdots① \\ [\quad\quad]=[\quad\quad] & \cdots\cdots②\end{cases}$$

$a+d\neq 0$ のとき，$a=d$，$b=c=0$ となり $ad-bc<0$ に反する。

よって，求める条件は $[\quad\quad]=0$（ただし $ad-bc<0$） ……答

(2) (1)から

$$f(x)=\frac{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}{[\quad\quad]x+[\quad\quad]}\qquad([\quad\quad]+bc>0)$$

$f(u)=u$ を u の降べきの順に整理すると

$$[\quad\quad]=0 \qquad \cdots\cdots③$$

③が異なる2実数解は $[\quad\quad]\neq 0$，判別式 $\dfrac{D}{4}=[\quad\quad]>0$

よって，求める条件は $[\quad\quad]$ ……答

このとき，③の解を α，β とすると，

$$m=\frac{\alpha+\beta}{2}=[\quad\quad] \qquad \cdots\cdots答$$

解法の Points

← $y=f(x)$ ……①
の逆関数：
まず，x を y で解き，
$x=f^{-1}(y)$
次に，x と y を入れかえる。
$y=f^{-1}(x)$ ……②
①のグラフと②のグラフは $y=x$ に関して線対称である。

← $ad-bc<0$

← $ax^2+bx+c=0$
が異なる2実数解をもつ条件は
$a\neq 0$，$D=b^2-4ac>0$
さらに，解を α，β とすると，
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 11)

1 (1) 方程式 $2\sin^2 x+(1-\sqrt{3})\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}-2=0$ の解 x を，$0\leqq x<\pi$ の範囲で求めよ。 (日本大-歯)

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ $(0<\theta<\pi)$ をみたす θ を求めよ。 (岩手医大-医)

2 $\sin\frac{\pi x}{5}+\cos\frac{\pi x}{6}$ の周期を求めよ。 (自治医大)

3 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq x<2\pi$ とする。

$$(\sin x-\sin^3 x)^2+(\cos x-\cos^3 x)^2\geqq\frac{3}{16}$$

(東邦大-医)

4 $f(t)=at^2+bt+c$，$g(x)=px+q$ とおいたとき，$g^{-1}(f(g(x)))=x^2+r$ となるためには，$p=\square$，$q=\square$ でなくてはならない。ここで，a，b，c，p，q，r は定数 $(a\neq 0,\ p\neq 0)$ である。 (東京工芸大)

5 $f(x)=x^2+ax+b$ は $2f'(f(x))+1=f(f'(x))$ をみたすものとする。$f(3)$ を求めよ。 (自治医大)

6 $0\leqq x\leqq 1$ で定義された関数 $f(x)=|2x-1|$ について，

(1) $y=f(f(x))$ のグラフをかけ。

(2) $f(f(f(x)))=x$ となる x の個数を求めよ。 (北大)

7 関数 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$ の逆関数 $f^{-1}(x)=f(x)$ であるための必要十分条件を求めよ。また，この条件をみたすとき，$f^3(x)=f(x)$ であることを示せ。ただし，$f^2(x)=f(f(x))$，$f^3(x)=f(f^2(x))$ を表すものとする。 (徳島文理大-薬)

8 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ のとき，$f(f(x))=\square$ で，$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\square$ である。 (昭和薬大)

9 $f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 0) \\ x^2 & (x\geqq 0)\end{cases}$，$g(x)=f(x+4)$ とする。$h(x)=g^{-1}(x)$ とおくとき $h(0)$ を求めよ。 (自治医大)

10 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とし，$g(0)=5$ とする。$f(2x+1)=h(x)$ とし，$h(x)$ の逆関数を $l(x)$ とするとき，$l(0)$ を求めよ。 (自治医大)

Hints

1 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$

$\sin\theta+\cos\theta>0$ に注意。

2 n が整数のとき

$\sin(x+2n\pi)=\sin x$

$\cos(x+2n\pi)=\cos x$

2π を基本周期という。

3 $0\leqq 2x<4\pi$ に注意。

4, **5**

$ax^2+bx+c=0$ が恒等式

$\iff a=b=c=0$

さらに，

ax^2+bx+c

$=a'x^2+b'x+c'$

$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

6 $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$

7 $\frac{ax+b}{x+c}=a+\frac{b-ac}{x+c}$

から，逆関数が存在するためには $b-ac\neq 0$

8 $f(f(x))=\frac{f(x)}{f(x)-1}$

9 $y=f(x+4)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸の正方向に -4 平行移動したもの。

10 $g(x)=f^{-1}(x)$

$l(x)=h^{-1}(x)$