8 ―― 極値とグラフの凹凸

☞解答は「解説と解答」p. 39

第8講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学βの完全整理」p. 58〜69 参照〕

1．$f'(x)>0$ のとき増加，$f'(x)<0$ のとき減少
2．$f'(x)$ の符号の変化するところが極値
3．$f''(x)>0$ のとき下に凸，$f''(x)<0$ のとき下に凹
4．$f''(x)$ の符号の変化するところが変曲点
5．グラフの概形の理解(増減・凹凸表)

さくらの個別指導
H25.03.13
さくら教育研究所

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ を $f(x)=x\log x$ とするとき，$y=f(x)$ の極値を求めよ。　(順天堂大-医)

(2)　$f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2}$ とする。$y=f(x)$ の表す曲線の概形をえがくために，$f(x)$ の極値，曲線の変曲点，凹凸を調べて，表をつくれ。　(東京慈恵会医大)

●解答への Approach

(1)　$f(x)=x\log x$

$f'(x)=$〔　　〕

増減表から，$x=$〔　　〕で極小。

極小値は　f(〔　　〕)$=$〔　　〕　……答

x		…		…
$f'(x)$				
$f(x)$				

(2)　$4-x^2\geqq 0$ から，　$-2\leqq x\leqq 2$

$f'(x)=$〔　　〕

$\therefore\ f''(x)=$〔　　〕

x	-2	…	$1-\sqrt{3}$	…	1	…	2
$f'(x)$							
$f''(x)$							
$f(x)$	0						0

解法の Points

●平均値の定理

$a<c<b$ である c が存在して

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=f'(c)$$

$f'(x)>0$ ならば増加

$f'(x)<0$ ならば減少

← $y=\sqrt{4-x^2}$

$t=4-x^2$ とおくと　$y=t^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x)$$

$$(\sqrt{4-x^2})'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(fg)'=f'g+fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

例題2 関数 $f(x)=\sqrt{\log_a(x-1)}$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ。

(3) $y=f(x)$ の増減と変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。 （島根医大）

●解答への Approach

(1) $f(x)$ の定義域は，まず，真数条件 $x-1>0$ と $\log_a(x-1)\geqq 0$

$a>1$ のとき，〔　　〕$\geqq 1$　　$\therefore$ $x\geqq$〔　　〕

$0<a<1$ のとき，　$0<$〔　　〕$\leqq$〔　　〕

$\therefore$ 〔　　〕$<x\leqq$〔　　〕 ……答

(2) $f'(x)=\dfrac{\{\log_a(x-1)\}'}{2\sqrt{〔\qquad〕}}=\dfrac{1}{2\log a(〔\qquad〕)\sqrt{〔\qquad〕}}$ ……答

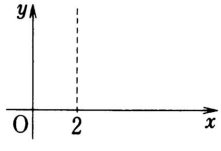
$f''(x)=-\dfrac{2〔\qquad〕+〔\qquad〕}{4(\log a)^2(〔\qquad〕)^2\{\sqrt{〔\qquad〕}\}^3}$ ……答

(3) (i) $a>1$ のとき：

$x>2$ で $f'(x)>0$，$f''(x)<0$

変曲点は〔　　〕

$f(2)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$〔　　〕，$\lim\limits_{x\to 2+0}f'(x)=$〔　　〕



$x\geqq 2$ で単調〔　　〕で，グラフは下に〔　　〕

(ii) $0<a<1$ のとき：

$1<x<2$ で，$f'(x)<0$ から，単調〔　　〕

$f''(x)=0$ の解 α は　$\alpha=\Big[\qquad\Big]$ で

$1<x<\alpha$ で $f''(x)>$〔　　〕で下に〔　　〕

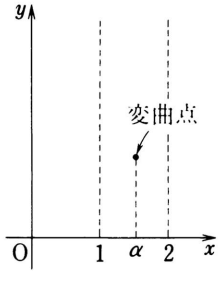
$\alpha<x<2$ で $f''(x)<$〔　　〕で下に〔　　〕

よって，変曲点は $\left(\alpha,\ \sqrt{-\dfrac{1}{2〔\qquad〕}}\right)$

$f(2)=0$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=$〔　　〕，$\lim\limits_{x\to 2-0}f'(x)=$〔　　〕

よって，$y=f(x)$ の増減，凹凸は次のようになる。

x	1	…	α	…	2
$f'(x)$					
$f''(x)$					
$f(x)$					



解法の Points

●実数条件

$\log_a x$ のとき，真数条件 $x>0$

底の条件　$a>0$，$a\neq 1$

$\sqrt{x}$ のとき，$x\geqq 0$

← $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$\sqrt{\log_a(x-1)}=\{\log_a(x-1)\}^{\frac{1}{2}}$

←区間 $(a,\ b)$ で

$f''(x)>0$

$\Longrightarrow$ $y=f(x)$ は下に凸

$f''(x)<0$

$\Longrightarrow$ $y=f(x)$ は下に凹

$f''(x)$ の符号の変わる点が変曲点

←$0<a<1$ のとき

$x=1$ は漸近線

← $\left.\begin{array}{l}f'(x)>0\\f''(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ⤴

$\left.\begin{array}{l}f'(x)>0\\f''(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ↱

$\left.\begin{array}{l}f'(x)<0\\f''(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ⤷

$\left.\begin{array}{l}f'(x)<0\\f''(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ ⤵

例題3 次の各問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，e^x と $\frac{1}{2}x^2$ の大小を比べ，それを用いて，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ を求めよ。

(2) 関数 $y=(1+x)e^{-x}$ のグラフをかけ。 （三重大）

●解答への Approach

(1) $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$ とおく。$x>0$ について，

$f'(x)=$〔　　〕，$f''(x)=$〔　　〕$>$〔　　〕

よって，$f'(x)$ は $x>0$ で単調増加で，また $f'(0)=1>0$

$\therefore\ f'(x)$〔　　〕$0\ (x>0)$

ゆえに，$f(x)$ は $x>0$ で単調増加で，また，$f(0)=1>0$

$\therefore\ f(x)$〔　　〕$0\ (x>0)$

$\therefore\ e^x$〔　　〕$\frac{x^2}{2}\ (x>0)$

$\therefore\ 0$〔　　〕xe^{-x}〔　　〕$\frac{2}{x}$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty} xe^{-x}=$〔　　〕 ……答

(2) $y=(1+x)e^{-x}$

$y'=$〔　　〕

$y''=$〔　　〕

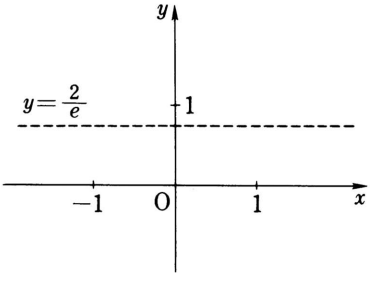
これから，次の増減，凹凸の表が得られる。

x	…	0	…	1	…
y'					
y''					
y					

$\lim_{x\to-\infty} y=$〔　　〕

$\lim_{x\to\infty} y=$〔　　〕

$x=-1$ のとき，$y=$〔　　〕



解法の Points

← $f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は増加
$f''(x)>0 \Longrightarrow f'(x)$ は増加

← はさみうちの原理

← $(fg)'=f'g+fg'$
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ から
$(e^{-x})'=-e^{-x}$

← $\left.\begin{array}{l} y'>0 \\ y''<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ↗
$\left.\begin{array}{l} y'<0 \\ y''<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ↘
$\left.\begin{array}{l} y'<0 \\ y''>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ ↘

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 41)

1 関数 $f(x)=e^x-(ax^2+bx)$ (a, bは定数) について，関数 $f(x)$ の極大値の個数をl，極小値の個数をmとする。a，bの値によって l，m はどのようになるか。$a<0$，$a=0$，$a>0$ の3つの場合に分けて考察し，l，m の値を求めよ。 (富山医薬大)

2 関数 $f(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{k}{x-2}$ において，kの値を正の数に定めたとき，$x>2$ において $f(x)$ が極値をもつようなaの値を定めよ。 (慶大)

3 関数 $f(x)=(ax+b)e^{-cx}$ は $x=-2$ で極値をとり，点 $(-1, f(-1))$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとする。ただし，a，b，c は正の定数で，eは自然対数の底である。

(1) cの値を求め，bをaで表せ。

(2) $f(x)$ とその不定積分 $F(x)$ が等式

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(3h)-f(0)-F(2h)+F(0)\}=-24$$

をみたすとき，a，bの値を求めよ。 (大阪市大)

4 関数 $y=f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ について，

(1) 増減を調べ，極値を求めよ。

(2) 凹凸を調べ，変曲点を求めよ。 (群馬大-医)

5 (1) 関数 $y=(x^3+2x+2)e^{-x}$ の増減を調べて，グラフの概形をかけ。ただし，eは自然対数の底であって，$2.7<e<2.8$ である。

(2) 定数aに対して，方程式 $(x^3+2x+2)e^{-x}=a$ の異なる実数解の個数を求めよ。 (信州大-理・医)

6 $x>0$ で定義された関数 $f(x)=2x^2\log x+x^2$ について，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

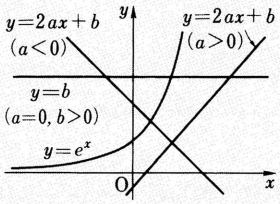
関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べ，変曲点の座標を求めよ。 (徳島大-理系)

7 関数 $f(x)=\log(2\sin x)$ $(0<x<\pi)$ について，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

増減，極値および凹凸を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。 (岡山大)

Hints

1



2 aの範囲に注意して，ていねいに調べる。

3 $(fg)'=f'g+fg'$

$(e^{-cx})'=e^{-cx}\cdot(-c)$

$F'(x)=f(x)$ のとき，$F(x)$を$f(x)$ の不定積分という。

すなわち，

$f(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

4 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$(e^{2x})'=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}$

5 $(fg)'=f'g+fg'$

$(e^{-x})'=e^{-x}\cdot(-1)$

6 $(fg)'=f'g+fg'$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

7 $y=\log(\sin x)$ → $t=\sin x$

とおくと　$y=\log t$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{t}\cdot\cos x$

9 最大値・最小値

☞解答は「解説と解答」p. 44

第9講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学βの完全整理」p. 58〜69 参照〕

1．$f(a)$ が最小値とは，$f(a) \leqq f(x)$

2．$f(a)$ が最大値とは，$f(a) \geqq f(x)$

3．$f(x)$ の増減表を利用する。

4．極値と端点に注意する。

5．定義されない点とか，$\pm\infty$ は考えない。

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{ax}{x^2+a^2}$ $(a>0,\ x \geqq 0)$ の最大値を求めよ。　（東京女子医大）

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$4\sin^3\theta-3\sin^2\theta+1$ を最大にする θ の値と，最小にする θ の値を求めよ。

（岡山理大）

●解答への Approach

(1)　$f'(x)=$〔　　〕

$\lim_{x\to\infty} f(x)=$〔　　〕

$f(x)$ の増減表から，最大値：〔　　〕　……答

x	0	…	a	…
$f'(x)$				
$f(x)$				

(2)　$f(\theta)=4\sin^3\theta-3\sin^2\theta+1$ とおく。

$f'(\theta)=$〔　　〕−〔　　〕

$=$〔　　〕$\sin\theta\cos\theta$(〔　　〕)

$f'(\theta)=0$ とおくと

$\sin\theta=0$，〔　　〕；〔　　〕

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，　$\theta=$〔　　〕

よって，右の増減表を得る。

これから，$f(\theta)$ を

答 ｛最大にする θ の値は　$\theta=$〔　　〕
　　最小にする θ の値は　$\theta=$〔　　〕

θ	0	…		…	
$f'(\theta)$					
$f(\theta)$					

解法の Points

← $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$f(x)=\dfrac{a}{x+\dfrac{a^2}{x}}$

$\leqq \dfrac{a}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{a^2}{x}}}=\dfrac{1}{2}$

$(fg)'=f'g+fg'$

例題2 関数 $f(x)=\log(1+x)-ax$ について，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。ただし，対数の底は e である。 （室蘭工大）

●解答への Approach

$$f(x)=\log(1+x)-ax \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

$$f'(x)=\Big[\qquad\qquad\Big] \quad \cdots\cdots①$$

$$=-\frac{a}{1+x}\left(\Big[\qquad\qquad\Big]\right) \quad \cdots\cdots②$$

$0\leqq x\leqq 1$ においては $\Big[\quad\Big]\leqq\dfrac{1}{1+x}\leqq[\quad]$

(i) $a<\Big[\quad\Big]$ のとき，①より $f'(x)[\quad]0$

よって，$f(x)$ は単調〔　　〕で

$M(a)=f([\quad])=[\qquad\qquad]$

(ii) $\Big[\quad\Big]\leqq a<[\quad]$ のとき，②より $f'(x)=0$ にする x の値は

$x=\Big[\qquad\qquad\Big]^*$

よって，この場合は $[\quad]<\Big[\qquad\qquad\Big]^*\leqq[\quad]$

よって，$f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	…	*	…	1
$f'(x)$					
$f(x)$					

$\therefore\ M(a)=f\left(\Big[\qquad\qquad\Big]\right)$

$=[\qquad\qquad]$

(iii) $a\geqq[\quad]$ のとき，

$\Big[\qquad\qquad\Big]\leqq 0$ より

$f'(x)[\quad]0$　ゆえに，$f(x)$ は単調〔　　〕。

$\therefore\ M(a)=f([\quad])=[\quad]$

(i)，(ii)，(iii)より

$$M(a)=\begin{cases}[\qquad\qquad] & \left(a<\Big[\quad\Big]\text{ のとき}\right)\\ [\qquad\qquad] & \left(\Big[\quad\Big]\leqq a<[\quad]\text{ のとき}\right)\\ [\quad] & (a\geqq[\quad]\text{ のとき})\end{cases} \quad \cdots\cdots\boxed{答}$$

解法の Points

←これで，a の場合分け！

←区間内で単調増加なら，$f(x)$ は右端で最大値。単調減少なら，$f(x)$ は左端で最大値。

←$x\neq -1$ である。

←上記参照。

例題3 $p>0$ とする。双曲線 $x^2-y^2=1$ に点 $P(0, p)$ から2本の接線をひいて，それぞれの接点をA，Bとするとき，△PAB の面積を最小にするような p の値を求めよ。 （京大-理系）

●解答への Approach

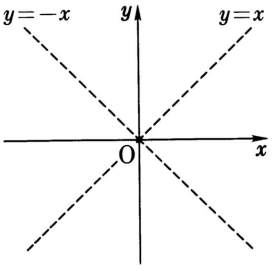
曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線

$$[\qquad\qquad]=1$$

が点 $(0, p)$ を通るとき

$$y_1=[\qquad\qquad]$$

$$\therefore\quad x_1=\pm[\qquad\qquad]$$



2接点は

$$\left(-[\qquad\qquad],\ [\qquad\qquad]\right),\ \left([\qquad\qquad],\ [\qquad\qquad]\right)$$

したがって，

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times[\qquad\qquad]\times\left([\qquad\qquad]\right)$$

$$=\sqrt{[\qquad\qquad]}$$

$f(x)=[\qquad\qquad]$ $(x=[\qquad\qquad],\ x>0)$ とおくと

$$f'(x)=[\qquad\qquad\qquad\qquad]$$

$$=[\qquad\qquad\qquad\qquad]$$

$f(x)$ は，右の増減表から $x=[\qquad\qquad]$ で $[\qquad\qquad]$ になるから，△PAB を $[\qquad\qquad]$ にする p は

x	0	…	2	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘		↗

$$p=[\qquad\qquad]$$ ……答

解法の Points

← $x^2-y^2=1$
を x で微分すると
$$2x-2yy'=0$$
$$y'=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$
$x^2-y^2=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は
$$y=\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1$$
$\therefore\quad y_1y=x_1x-x_1^2+y_1^2$
$\therefore\quad x_1x-y_1y=x_1^2-y_1^2$
いま，$x_1^2-y_1^2=1$ であるから
$$x_1x-y_1y=1$$

←$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

←$f'(x)>0$ のとき：$f(x)$ は増加
$f'(x)<0$ のとき：$f(x)$ は減少

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 46)

1 次の関数の $x>0$ における最大値を求めよ。

$$f(x)=e^x\left(\sin x-\frac{2}{\pi}x+\frac{2}{\pi}\right)$$

(宮崎医大)

2 曲線Cを次の式で定める。

$$C:x^2+y^2=1,\ 0<x<1,\ 0<y<1$$

このとき，曲線Cの接線と2直線 $x=1$，$y=1$ で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。

(京都府医大)

3 座標平面において次の条件をみたす△ABCと 半平面 $H=\{(x,\ y)|x\geqq 0\}$ との共通部分の面積の最大値を求めよ。△ABCは AB=AC であるような二等辺三角形であって，BCはy軸に平行でAの座標は$(-1,\ 0)$である。また，ABとy軸との交点をDとすると，$\mathrm{BD}=2\sqrt{3}$ である。

(京大)

4 (1) 次の式で表される曲線Cをかけ。

$$C:|y+1||y-1|+|x|=1\ (y\geqq 0)$$

(2) 直線 $x=a$ $(a>0)$ が曲線Cと2点 P, Q で交わっているとする。PQを1辺とし，4頂点が曲線C上にある長方形PQRSの面積が最大となるときのaの値を求めよ。

(東京医歯大)

5 $f(x)=\cos 2x+a\cos x+b$ とする。関数 $f(x)$ は，$x=\dfrac{\pi}{3}$ で極値1をとるものとする。次の各問いに答えよ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲において，$f(x)$ の最大値，最小値，およびそのときのxの値を求めよ。

(新潟大-理系)

6 円周 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l と点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を通り l に垂直な直線との交点をHとする。次の問いに答えよ。

(1) 三角形AHPの面積を求めよ。

(2) 点Pが円周上を動くとき，△AHPの面積の最大値を求めよ。

(鳥取大-理系)

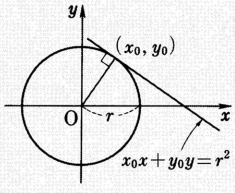
7 aを定数とし，$f(x)=(x+1)^2(a-x)$ とおく。このとき，$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(奈良県医大-改)

Hints

1 $\sin(x+\theta)$
$=\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta$
$=\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x$

2



3 台形の面積
$=\dfrac{(\text{上底}+\text{下底})\cdot\text{高さ}}{2}$

4 $(fg)'=f'g+fg'$
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$
$((2-x)^{\frac{1}{2}})'$
$=\dfrac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)$

5 $(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$
$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

6 $(x_0,\ y_0)$ と
$ax+by+c=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7 $(fg)'=f'g+fg'$

10 微分法の応用

☞解答は「解説と解答」p. 49

第10講座
数学III

■この講座のねらい■ 〔「数学 β の完全整理」p. 70〜75 参照〕

1．微分法の概念の理解
2．微分法の方程式への応用
3．微分法の不等式への応用
4．微分法の図形への応用
5．微分法の復習

例題 1

(1) a は正の定数とする。$x>0$ のとき，

$$x\log x+a\log a \geqq (x+a)\log\frac{x+a}{2}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\tan x>x$ が成り立つことを証明せよ。 (福島県医大)

●解答への Approach

(1) $f(x)=x\log x+a\log a-(x+a)\log\dfrac{x+a}{2}$ とおくと，

$$f'(x)=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]=\log\Big(1+\Big[\qquad\qquad\Big]\Big)$$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$				
$f(x)$				

$\therefore\ f(x)$〔　　〕$f(a)=$〔　　〕

よって，これは与不等式が成り立つことを示している。等号は $x=a$ のときにのみ成り立つ。

(2) $f(x)=\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{1}{3}\tan x-x$ とおくと，

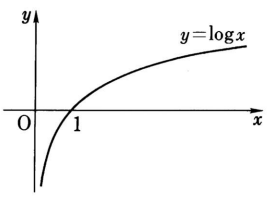
$$f'(x)=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]>\Big[\qquad\Big]\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，$f(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調増加であり，$f(0)=0$ に注意すると，与不等式は成り立つ。

解法の Points

← $(fg)'=f'g+fg'$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$



← $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

例題2 微分可能な関数 $f(x)$ について，次の(1)，(2)を示せ。

(1) $f(x)+xf'(x)>0$ ならば，$f(x)>0$ である。

(2) $f(0)=0$，$f(x)+f'(x)>0$ ならば，$x\neq 0$ のとき，$f(x)$ は x と同符号である。 (群馬大)

●解答への Approach

(1) $\{xf(x)\}'=$〔　　〕　∴ $\{xf(x)\}'>$〔　　〕

よって，$F(x)=xf(x)$ とおくと，$F(x)$ は〔　　〕関数，$F(0)=$〔　　〕

(i) $x>0$ のとき，$F(x)$〔　　〕0　∴ $f(x)$〔　　〕0

(ii) $x<0$ のとき，$F(x)$〔　　〕0　∴ $f(x)$〔　　〕0

(iii) $f(x)+xf'(x)>0$ で $x=0$ とおくと，　$f(0)$〔　　〕0

よって，(i)，(ii)，(iii)から

$f(x)+xf'(x)>0$ ならば　$f(x)$〔　　〕0

(2) 条件 $f(x)+f'(x)>0$ の両辺に e^x (>0) をかけると，

$e^xf(x)+e^xf'(x)$〔　　〕0

$g(x)=e^xf(x)$ とおくと

$g'(x)=$〔　　〕　∴ $g'(x)$〔　　〕0

よって，$g(x)$ は〔　　〕関数で，$g(0)=$〔　　〕

よって，$x>0$ のとき：　$g(x)$〔　　〕0　∴ $f(x)$〔　　〕0

$x<0$ のとき：　$g(x)$〔　　〕0　∴ $f(x)$〔　　〕0

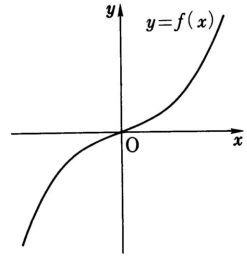
よって，$x\neq 0$ のとき，$f(x)$ と x は同符号 $(xf(x)>0)$ である。

解法の Points

←$(fg)'=f'g+fg'$

$f'(x)>0$ のとき $f(x)$ は増加

$f'(x)<0$ のとき $f(x)$ は減少



←$f(x)+f'(x)=1$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

(解) 両辺に e^x をかける。

$e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x$

∴ $\{e^xf(x)\}'=(e^x)'$

∴ $e^xf(x)=e^x+C$

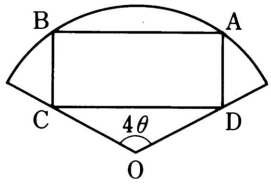
(C は定数)

∴ $f(x)=e^{-x}(e^x+C)$

∴ $f(x)=1+Ce^{-x}$

上の例のように，両辺に e^x をかけると問題の解が見えてくるようになることがある。

例題3 点Oを中心とする半径1の円を中心角 4θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ で切った扇形に，下の図のように内接する長方形ABCDを考える。



(1) $\angle AOB=2x$ として，ABCDの面積 $S_\theta(x)$ を求めよ。

(2) $S_\theta(x)$ を最大にする x の値と，最大値 $M(\theta)$ を求めよ。

(3) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で変化するとき，関数 $M(\theta)$ のグラフをかけ。

(東北大-理系)

●解答への Approach

(1) AB，CDの中点をそれぞれM，Nとすると，

AM=〔　　〕，OM=〔　　〕

OD=a として

ND=〔　　〕，ON=〔　　〕

AM=NDから　　a=〔　　〕

∴ ON=〔　　〕$\sin x$

∴ MN=〔　　〕

∴ $S_\theta(x)$=〔　　〕 ……答

(2) $S_\theta'(x)$=〔　　〕

$\left(0<x<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

であるから，x=〔　　〕のとき，

$S_\theta(x)$ は最大となる。

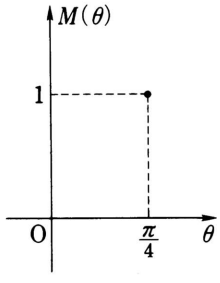
∴ $M(\theta)=S_\theta(\theta)$=〔　　〕 ……答

x	0	…	θ	…	2θ
$S_\theta'(x)$					
$S_\theta(x)$					

(3) $M'(\theta)$=〔　　〕>0 $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$

$M''(\theta)$=〔　　〕>0 $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって，$M(\theta)$ のグラフは右のようになる。



解法の Points

← MN=OM−ON

← $2\sin x\cos x=\sin 2x$
$\cos 2x-1=-2\sin^2 x$

← $(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

← $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$f'(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は増加

$f''(x)>0 \Longrightarrow f(x)$ は下に凸

このとき，　⤴ $y=f(x)$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 51)

1 x を未知数とする方程式 $ax=2\log x+\log 3$ $(x>0)$ について，方程式の実数解の個数を a の値によって分類して答えよ。 (徳島大)

2 x の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および2次導関数 $f''(x)$ が存在して，次の3条件をみたしている。

(i) $f(0)>0$　(ii) $f'(0)>0$

(iii) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，つねに $f''(x)>f(x)$

このとき，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，つねに $f(x)>0$ であることを示せ。 (京大)

3 a を1でない正の実数とする。x の方程式 $a^x-x-\dfrac{1}{\log a}=0$ が実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。 (神戸大-理系)

4 a, b を正の定数とするとき，関数 $f(x)=x\log\dfrac{x+b}{a}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) 方程式 $f'(x)=0$ の解はただ1つで，方程式 $f(x)=0$ の解の間にあることを証明せよ。 (浜松医大)

5 xy 平面上の曲線 $y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)$ と，原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$ を求めよ。 (東京工大)

6 (1) AB=AC=1，∠A=2θ である三角形ABCの内接円の半径 r を θ で表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，r を最大にする θ の値を α とする。$\sin\alpha$ を求めよ。 (岐阜大-医・工)

7 $x>0$ のとき，任意の自然数 n に対して

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\left(1-\frac{x^n}{n!}\right)e^x$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，e は自然対数の底とする。 (岡山大)

8 $x\geqq 0$ で定義された2つの関数 $u(x)$, $v(x)$ がそれぞれ(ア), (イ)をみたしている。

(ア) $\dfrac{du}{dx}\leqq ku$　(イ) $\dfrac{dv}{dx}=kv$

ただし，k は正の定数で，$u(0)=v(0)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=e^{-kx}u(x)$ の導関数の符号を調べよ。

(2) $u(x)\leqq v(x)$ を示せ。 (山口大-理系)

Hints

1 $\dfrac{2\log x+\log 3}{x}=a$ とする。

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

2 $\{g(x)e^{-x}\}'$

$=g'(x)e^{-x}+g(x)(-e^{-x})$

$\{f(x)e^x\}'$

$=f'(x)e^x+f(x)e^x$

3 対数は自然対数。

$a>1$ のとき，

$\alpha\geqq 0 \iff a^\alpha\geqq 1$

4 $(fg)'=f'g+fg'$

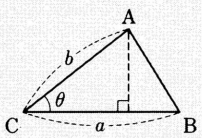
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

5 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$

$(\cos^2\theta)'=-\sin 2\theta$

6 $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$



7 $k!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k$

$1!=1$, $0!=1$

と約束する。

8 $(e^{-kx})'=e^{-kx}(-k)$

$=-ke^{-kx}$

11 積分法

☞解答は「解説と解答」p. 54

第11講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 76〜95 参照〕

1. $\int f(x)dx$ は $f(x)$ の不定積分(原始関数)で，微分したら $f(x)$ となるもの。
2. $\int f(x)\,dx$ は $\dfrac{d}{dx}f(x)$ の逆演算であることの理解
3. $f(x)>0$ のとき，$\int_a^b f(x)dx$ は $y=f(x)$ と x 軸の a から b までの間の面積
4. $G'(x)=f(x)$ のとき，$\int_a^b f(x)dx=\Big[G(x)\Big]_a^b=G(b)-G(a)$
5. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　不定積分 $\int x^2e^{3x}dx$ を求めよ。

(2)　n は自然数であるとして　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+(n-1)}}\right\}$ を求めよ。　(九州歯大)

●解答への Approach

(1)　与式 $=\Big[\qquad\qquad\Big]-\Big[\qquad\Big]\int x\,e^{3x}dx$

$=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]+\Big[\qquad\Big]\int e^{3x}dx$

$=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]+C$　……答

(2)　与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]\right\}$

$=\int_0^1\Big[\qquad\qquad\Big]dx=\Big[\Big[\qquad\qquad\Big]\Big]_0^1$

$=\Big[\qquad\qquad\Big]$　……答

解法の Points

←$(fg)'=f'g+fg'$

$\therefore\ fg=\int f'gdx+\int fg'dx$

$\therefore\ \int fg'dx=fg-\int f'gdx$

$(e^{3x})'=e^{3x}\cdot 3$

$\therefore\ \int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x}+C$

←$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

$\int(1+x)^{\alpha}dx\ \ (\alpha\neq-1)$

$=\dfrac{(1+x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

例題2 $a_n=\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x dx$, $n=1, 2, \cdots$ とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) $0<a_n<\frac{e}{n!}$, $n=1, 2, \cdots$ であることを示せ。

(2) a_n-a_{n-1} $(n\geqq 2)$ を調べて，a_n を求めよ。

(3) (1)と(2)により，無限級数 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ の和を求めよ。 (新潟大-理系)

●解答への Approach

(1) $0<x<1$ では，$0<e^x<e$ である。そこで，

$$0<a_n<\int_0^1 \Big[\qquad\qquad\Big]dx$$

$$=\Big[\Big[\qquad\qquad\Big]\Big]_0^1=\Big[\qquad\Big]$$

$$\therefore\ 0<a_n<\Big[\qquad\Big]$$

(2) $$a_{n-1}=\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-2)!}e^x dx=\left[-\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x\right]_0^1-\int_0^1\Big[\qquad\qquad\Big]dx$$

$$=\Big[\qquad\qquad\Big]+\Big[\quad\Big]$$

$$\therefore\ a_n-a_{n-1}=\Big[\qquad\qquad\Big]\ (n\geqq 2)$$

$$(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\qquad\Big]$$

ここで，$a_1=\Big[\qquad\Big]$から，

$$a_n=\Big[\quad\Big]-\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\qquad\Big]$$ ……答

(3) (1)の結果から，はさみうちの原理によって，

$$0<\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}\Big[\qquad\Big]=\Big[\quad\Big]\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\Big[\quad\Big]$$

次に，(2)の結果から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\Big[\quad\Big]-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\Big[\qquad\Big]$$

$$\therefore\ 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=\Big[\quad\Big]$$ ……答

解法の Points

← $\int_0^1(1-x)^{n-1}dx$
$=\left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n}$
$(fg)'=f'g+fg'$
$\int f'g dx=fg-\int fg'dx$

← $k!=k(k-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$
$0!=1$ と約束する。

← $\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$

← $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}=\beta$
のとき，
$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)$
$=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n$ (複号同順)

例題3 n を自然数とする。次の各問いに答えよ。

(1) $I_n=\int_0^{\pi}\sin^n\theta\,d\theta$ とおく。$n\geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} で表せ。

(2) $J_n=\int_0^1 x^n(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx$ $(n\geqq 2)$ とおくとき，J_n を I_n で表せ。

(3) J_6 を求めよ。 (九大-理系)

●解答への Approach

(1) $I_n=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}\theta([\qquad])'d\theta$

$=\Big[\qquad\qquad\Big]+\int_0^{\pi}[\qquad\qquad]d\theta$

$=([\qquad])\int_0^{\pi}([\qquad\qquad])d\theta$

$=([\qquad])I_{n-2}-([\qquad])I_n$

$\therefore\ I_n=\Big[\qquad\Big]I_{n-2}$ ……答

(2) J_n で，$x=\sin t\ \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\cos t\,dt$

$\therefore\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{[\quad]}dt$

$=\Big[\qquad\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^n dt$

$2t=\theta$ とおくと，$2dt=d\theta$ であるから，上の結果から

$J_n=\Big[\qquad\Big]\int_0^{\pi}\sin^n\theta\cdot\frac{1}{2}d\theta=\Big[\qquad\Big]I_n$ ……答

(3) $J_6=\Big[\qquad\Big]I_6=\Big[\qquad\Big]I_4=\Big[\qquad\Big]I_2$

$\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\Big[\qquad\Big]d\theta=\Big[\qquad\Big]$

$\therefore\ J_6=\Big[\qquad\Big]$ ……答

解法の Points

←$(fg)'=f'g+fg'$ から

$\int fg'dx=fg-\int f'gdx$

←$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

←

x	$0\to 1$
t	$0\to\frac{\pi}{2}$

$\sin 2t=2\sin t\cos t$

←

t	$0\to\frac{\pi}{2}$
θ	$0\to\pi$

←$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\int\cos 2\theta\,d\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}+C$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 56)

1 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。 (東京工大)

2 (1) $x=\frac{\pi}{4}-t$ とおくことにより，次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)\,dx$$

(2) $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ を計算せよ。 (東京医大)

3 (1) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x\geqq x\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $0<t<\frac{\pi}{2}$ とする。$x=-t,\ 0,\ t$ のとき，$f(x)=\cos x$ が成立するような2次関数 $f(x)$ を求め，$\int_{-t}^{t}f(x)dx\geqq\int_{-t}^{t}\cos x\,dx$ を示せ。 (筑波大)

4 次の極限を求めよ。 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}x^2|\sin nx|dx$ (東京工大)

5 (1) 関数 $\frac{\cos x}{1+\sin x}+x$ を微分せよ。

(2) 連続関数 $f(x)$ に対して $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ を示せ。

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$ を求めよ。 (高知医大)

6 自然数 n に対して $I_n(x)=\frac{3}{2}\int_{-x}^{x}\left(1-\frac{t^3}{n}\right)^n t^2dt$ とおく。定数 a に対して，

(1) $I_n(\sqrt[3]{a})$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}I_n(\sqrt[3]{a})=\sqrt{2}$ をみたす a を求めよ。 (金沢大-理系)

7 $I=\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\sin x\,dx$ とする。

(1) I の値を求めよ。

(2) k は定数で $0<k<\frac{\pi}{2}$ とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$I>2\int_0^{\frac{\pi}{2}-k}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\sin x\,dx>2k\int_0^{\frac{\pi}{2}-k}\sin x\,dx$$

(福島県医大)

8 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^{2n+k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ を求めよ。ただし，n は自然数とする。 (横浜市大-理系)

Hints

1 ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$

2 $(\tan x)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}$

$x=\tan t$ のとき，

$dx=\frac{1}{\cos^2t}dt$

3 $(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$g''(t)>0$ ならば $g'(t)$ は増加。

4 $\cos n\pi=(-1)^n$

5 $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

(2) $x=a-t$ とおく。

(3) $\sin(\pi-x)=\sin x$

6 $\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{a}{n}\right)^n=e^{\pm a}$

(複号同順)

7 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)<g(x)$ ならば

$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$

$a\leqq x\leqq b$ で $f(x)>0$,

$a<c<b$ ならば

$\int_a^c f(x)dx<\int_a^b f(x)dx$

8 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1 f(x)dx$

12 面積

☞解答は「解説と解答」p. 59

第12講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学βの完全整理」p. 96〜101 参照〕

1．定積分の定義・意味の再確認

2．不定積分の計算力の育成

3．$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)>0$ のとき，$y=f(x)$ と x 軸の間の面積

4．$a \leqq x \leqq b$ において，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の間の面積

5．$c \leqq y \leqq d$ において，$x=f(y)$ と $x=g(y)$ の間の面積

例題 1　曲線 $y=ax^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ1つの点で交わり，その交点で共通の接線をもつものとする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，これらの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　（名大）

●解答への Approach

(1)　2曲線が $x=t$ で接する条件は

$$at^2=\Big[\qquad\qquad\Big] \cdots\cdots①,\quad 2at=\Big[\qquad\Big] \cdots\cdots②$$

②から，$t=\Big[\qquad\qquad\Big]$ で，これを①に代入して

$$\frac{1}{2}\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]$$

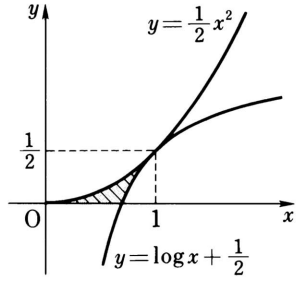
$$\therefore\quad b=\Big[\qquad\qquad\qquad\Big] \cdots\cdots \boxed{答}$$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$t=\Big[\quad\Big],\quad b=\Big[\qquad\Big]$$

2曲線の $x>0$ の部分での y の関数はそれぞれ

$$x=\Big[\qquad\qquad\Big],\quad x=\Big[\qquad\qquad\Big]$$



よって，求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]\Big)dy=\Big[\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\Big[\qquad\qquad\Big] \cdots\cdots \boxed{答}$$

解法の Points

← 2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が x 座標が t の点で接する条件は

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

← $\log\dfrac{1}{2a}=-\log 2a$

← $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と $y=\log x+\dfrac{1}{2}$ の共有点は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

← $\displaystyle\int e^y dy=e^y+C$

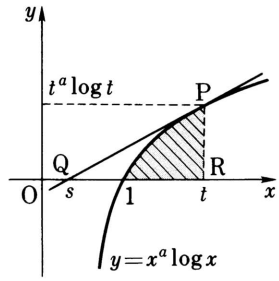
$\displaystyle\int y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$

例題2 a は正の定数とする。$t>1$ に対し，曲線 $y=x^a\log x$ 上の点 $\mathrm{P}=(t,\ t^a\log t)$ における接線が x 軸と交わる点を Q とし，点 $(t,\ 0)$ を R とする。

三角形 PQR の面積を $S_1(t)$，曲線 $y=x^a\log x$ の $x\geqq 1$ の部分と，2つの直線 $y=0$，$x=t$ とで囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{S_2(t)}{S_1(t)}$ の値を求めよ。 （阪大）

●解答への Approach



$$y=x^a\log x$$

$$\therefore\quad y'=x^{a-1}(\boxed{\qquad\qquad})$$

よって，$\mathrm{Q}(s,\ 0)$ とおくと，直線 PQ の傾きについて，

$$\frac{t^a\log t}{t-s}=\boxed{\qquad\qquad}$$

$$\therefore\quad t-s=\boxed{\qquad\qquad}$$

$t>1$ から，$t-s>0$ である。よって，

$$S_1(t)=\boxed{\qquad\qquad}$$

一方，

$$S_2(t)=\int_1^t\boxed{\qquad\qquad}dx$$

$$=\left[\boxed{\qquad\qquad}\log x\right]_1^t-\int_1^t\boxed{\qquad\qquad}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\boxed{\qquad\qquad}$$

よって，

$$\frac{S_2(t)}{S_1(t)}=\boxed{\qquad\qquad}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{S_2(t)}{S_1(t)}=\boxed{\qquad\qquad}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

解法の Points

← $\theta=\angle\mathrm{PQR}$ とおくと

$$\tan\theta=\frac{t^a\log t}{t-s}$$

$f(x)=x^a\log x$ とおくと

$$\tan\theta=f'(t)$$

← $S_1(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{RP}$

←$(fg)'=f'g+fg'$ から

$$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$$

$a+1\neq 0$ のとき，

$$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$$

←$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\beta$

⇨$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$

（複号同順）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)g(x)\}=\alpha\cdot\beta$

例題3　a，b を $a \geqq 1$，$a \neq 2$，$b>0$ なる定数とし，x の関数 $f(x)=2e^{2x}-ae^{x}+bx$ を考える。

(1)　$f(x)$ が単調増加となるとき，a，b のみたすべき条件を求めよ。

(2)　$y=f(x)$，$y=bx$，$x=0$ により囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(3)　(1)の条件のもとで a を動かすとき，S の最大値 M を b の関数として表せ。　（東北大）

●解答への Approach

(1)　$f(x)=2e^{2x}-ae^{x}+bx$

$$\therefore\quad f'(x)=[\qquad]\left(e^{x}-\left[\qquad\right]^{*}\right)^{2}+\left[\qquad\qquad\right]$$

いま，$e^{x}-\left[\qquad\right]^{*}=0$ となる x は1点のみで存在する。よって，求める条件は

$f'(x) \geqq 0$ であるから，

$$b \geqq \left[\qquad\right]$$ ……答

(2)　$f(x)-bx=0$ の解は，$x=\left[\qquad\qquad\right]$ ただ1つである。これを α とおくと，求める図形の面積 S は次のようになる。

$$S=\left|\int_{0}^{\alpha}\{f(x)-bx\}dx\right|=\left|\int_{0}^{\alpha}([\qquad\qquad])\,dx\right|$$

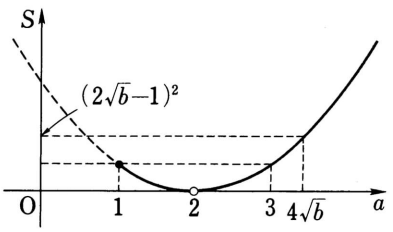
$$=\left|[\qquad]e^{2\alpha}-[\qquad]e^{\alpha}+[\qquad]\right|$$

いま，$e^{\alpha}=\left[\qquad\right]$ であるから，　$S=\left[\qquad\qquad\right]$ ……答

(3)　(1)から，

$$1 \leqq a \leqq [\qquad\qquad]$$

条件 $a \geqq 1$，$a \neq 2$ から，a と S の関係は右のようになる。よって，



(ア)　$a<1$ のとき，M は存在しない（$\because$ $a \geqq 1$）。

(イ)　$1 \leqq a \leqq 3$，$a \neq 2$ のとき，S の最大値 M は $\left[\qquad\right]$

(ウ)　$3<a \leqq k$ のとき，$a=k$ のとき M をとる。

答　$0<b<\left[\qquad\right]^{**}$ のとき，M は存在しない。

$\left[\qquad\right]^{**} \leqq b \leqq \left[\qquad\right]^{***}$ のとき，$M=\left[\qquad\right]$

$\left[\qquad\right]^{***}<b$ のとき，$M=\left[\qquad\qquad\right]$

解法の Points

← $e^{2x}=(e^{x})^{2}$

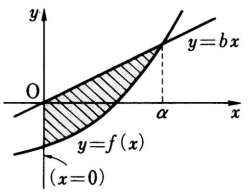
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$ から

$(e^{2x})'=e^{2x}\cdot 2$

$a \neq 0$ のとき，

$ax^{2}+bx+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^{2}-\dfrac{b^{2}-4ac}{4a}$



← $\alpha=\log\dfrac{a}{2} \iff e^{\alpha}=\dfrac{a}{2}$

←$|a| \leqq 4\sqrt{b}$

(ア)　$4\sqrt{b}<1 \iff 0<b<\dfrac{1}{16}$

(イ)　$1 \leqq 4\sqrt{b} \leqq 3$

$\iff \dfrac{1}{16} \leqq b \leqq \dfrac{9}{16}$

(ウ)　$3<4\sqrt{b} \iff \dfrac{9}{16}<b$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 61)

1 曲線 $y=\log_e(x+1)-1$ と，曲線の y 軸との交点における接線，および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。 (鳥取大)

2 原点を通る直線が，連立不等式 $y \geqq -x$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$ で表される図形の面積を 2 等分するという。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。この直線の方程式を求めよ。 (長崎大)

3 次の(1)，(2)に答えよ。

(1) 方程式 $|x^2-1|-a=0$ の実数解の個数を求めよ。

(2) 曲線 $y=|x^2-1|$ と直線 $y=a$ が囲む図形の面積を最小にする a の値を定めよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。 (鹿児島大)

4 直線 $y=4x$ と曲線 $y=2^x$ によって囲まれる図形の面積 S は，次の不等式をみたすことを示せ。

$$14<(32-S)\log 2<15$$

(奈良県医大)

5 関数 $y=f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ の逆関数を $y=g(x)$ とする。

(1) $x>0$ のとき，$f(x)>x$ を証明せよ。

(2) $y=g(x)$ のグラフをかけ。

(3) $y=g(x)$，$y=x$，$x=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。(名古屋市大)

6 a を正の定数として，次の式で表される曲線を C とする。

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)\ (0<\theta<\pi)$$

(1) 曲線 C の接線のうち，x 軸の正の向きと $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなすものの方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と(1)で求めた接線と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(愛媛大-理系)

7 2 点A(1, a)，B(2, b)を通る曲線がある。この曲線の接線と x 軸との交点をT，接点から x 軸におろした垂線の足をHとするとき，線分THの長さがつねに一定であるという。ただし，a，b は異なる正の定数とする。

(1) この曲線の方程式を求めよ。

(2) この曲線と直線ABとで囲まれる部分の面積 S を求めよ。(三重大-理系)

Hints

1 $\displaystyle\int \log(x+a)\,dx$

$\displaystyle=(x+a)\log(x+a)-\int dx$

2 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

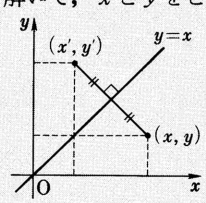
3 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\beta)(x-\alpha)\,dx$

$=-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}\ (\alpha<\beta)$

4 $2^x=e^{x\log 2}$

$\displaystyle\int e^{x\log 2}dx=\frac{e^{x\log 2}}{\log 2}+C$

5 $y=f(x)$ の逆関数とは，x で解いて，x と y をとりかえる。



$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$

6 $dx=a(1-\cos\theta)\,d\theta$

$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\displaystyle\int \cos 2\theta\ d\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}+C$

7 $k>0$ のとき，$k^x=e^{x\log k}$

$\displaystyle\int k^x dx=\int e^{x\log k}dx$

$\displaystyle=\frac{e^{x\log k}}{\log k}+C=\frac{k^x}{\log k}+C$

13 体積・長さ

☞解答は「解説と解答」p. 64

第13講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 102〜110 参照〕

1．体積・長さの概念
2．曲線を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積
3．曲線を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積
4．$y=f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ $(a<b)$ までの曲線の長さ
5．曲線が媒介変数表示されているときの曲線の長さ

例題 1　曲線 $y=x^n$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形 $R(n)$ が，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(n)$，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $W(n)$ とする。n が 2 以上の自然数で，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W(n)}{V(n)}$ を求めよ。　（山口大-理系）

●解答への Approach

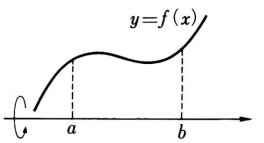
$$V(n)=\pi\int_0^1 [\qquad\qquad]dx-\pi\int_0^1 [\qquad\qquad]dx$$
$$=\pi\left(\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\right]\right)$$

$$W(n)=\pi\int_0^1 [\qquad\qquad]dy-\pi\int_0^1 [\qquad\qquad]dy$$
$$=\pi\left(\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\right]\right)$$

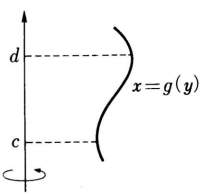
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{W(n)}{V(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\left(\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\right]\right)}{\pi\left(\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\qquad\right]\right)}$$
$$=[\qquad]$$ ……答

解法の Points

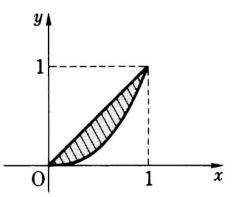
← $V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$



← $V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy$



← $y=x^n \iff x=y^{\frac{1}{n}}$



例題2 $f(x)$ を $0 \leqq x < 1$ で定義された単調に増加する微分可能な関数で $f(0)=0$ とする。任意の a $(0<a<1)$ について $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における弧の長さは $\log\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)-a$ で与えられる。関数 $f(x)$ を求めよ。 (筑波大)

●解答への Approach

弧長の条件から

$$\int_0^a [\qquad\qquad\qquad\qquad]dx = \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right)-a \quad \cdots\cdots①$$

$$右辺 = \log([\qquad\qquad])-\log([\qquad\qquad])-a$$

①式の両辺を a で微分すると,

$$左辺：\ \frac{d}{da}\int_0^a [\qquad\qquad\qquad\qquad]dx = [\qquad\qquad\qquad\qquad]$$

$$右辺：\ \frac{d}{da}(右辺) = \left[\qquad\qquad\right]+\left[\qquad\qquad\right]-\left[\qquad\right]$$

$$\therefore\ \{f'(a)\}^2 = \left[\qquad\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots②$$

$f(x)$ は単調増加であるから, $0<a<1$ で $\quad f'(a)[\quad]0$

よって, ②から

$$f'(a) = \left[\qquad\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots③$$

③を $a=0$ から $a=x$ まで積分すると, $f(0)=0$ であるから,

$$f(x) = \int_0^x \left[\qquad\qquad\qquad\right]da$$

$$= \left[\left[\qquad\qquad\qquad\right]\right]_0^x$$

$$= -\log([\qquad\qquad]) \quad \cdots\cdots\boxed{答}$$

解法の Points

← $y=f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの弧長 l は

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

← $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

← $y=\log|x|$ とする。

(i) $x>0$ のとき,

$$y = \log x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

(ii) $x<0$ のとき

$$y = \log(-x)$$

$t=-x$ とおくと

$$y = \log t$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}(-1)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|+C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \log|t|+C$$

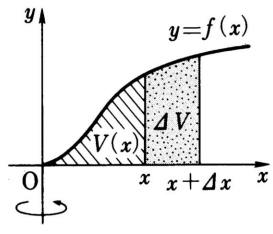
($t=f(x)$ とおくと $dt=f'(x)\,dx$)

$$\therefore\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$$

例題3 $f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は $V=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$ で与えられることを示し，この値を求めよ。 （東大）

●解答への Approach

$0<x\leqq 1$ とし，$y=f(x)$ の区間 $[0,\ x]$ の弧と x 軸および $(x,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線によって囲まれる部分を y 軸のまわりに回転した立体の体積を $V(x)$ とする。



このとき，

$$V(x+\Delta x)-V(x)=\Delta V$$

は，x 軸の区間 $[x,\ x+\Delta x]$ の部分を回転した部分（円環）を底面とし，高さが，およそ $f(x)$（Δxを十分小さくとる）の柱体の体積である。

このとき，底面の円環の面積は

$$\pi(\boxed{})^2-\pi\boxed{}$$
$$=\pi\{\boxed{}\}$$

$[x,\ x+\Delta x]$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすれば，

$$\pi(\boxed{})m\leqq\frac{\Delta V}{\Delta x}\leqq\pi(\boxed{})M$$

$f(x)$ は連続であるから，$\Delta x\to 0$ のとき，$M,m\to f(x)$

よって，はさみうちの原理から，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=\boxed{}\qquad\therefore\ \frac{dV}{dx}=\boxed{}$$

$$\therefore\ V=2\pi\int_0^1\boxed{}dx$$ ……答

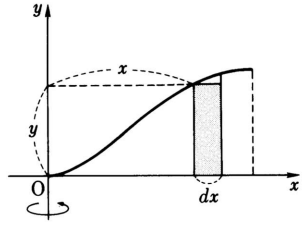
$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ のとき

$$V=2\pi\int_0^1\boxed{}dx$$

$\pi x^2=t$ とおくと，$2\pi x\,dx=dt$　　よって，

$$V=\int_0^\pi\boxed{}dt$$
$$=-\Big[\boxed{}\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\boxed{}dt$$
$$=\boxed{}$$ ……答

解法の Points



← dx を微小の増分とすると，体積の微小の増分 dV は，上図から，
$dV=2\pi xy\,dx$

← $\pi\{2x\Delta x+(\Delta x)^2\}m$
$\leqq\Delta V$
$\leqq\pi\{2x\Delta x+(\Delta x)^2\}M$

←

x	$0\to 1$
t	$0\to\pi$

$(fg)'=f'g+fg'$ から
$\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 66)

1 不等式 $|x+y| \leqq \sin x$, $0 \leqq x \leqq \pi$ の表す図形を x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ。 (群馬大)

2 $k>0$とし, $f(x)=\sin\left(kx+\dfrac{\pi}{6}\right)$ とする。曲線 $y=|f(x)|+1$ と x 軸および2直線 $x=0$, $x=2\pi$ で囲まれた部分の面積を$S(k)$とし, この部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を$V(k)$とする。

(1) $\displaystyle\lim_{k\to 0} S(k)$ を求めよ。 (2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} V(k)$ を求めよ。 (山梨医大)

3 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。xy 平面において, 次の2つの不等式をみたす領域を考える。

$$(y-\cos\alpha)(y-\cos x) \leqq 0,\quad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$$

この領域を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積が最小となる α の値およびそのときの体積を求めよ。 (神戸大)

4 直線 $y=k$ (ただし, $k>1$) を軸とし, 2点 $(0,\ k)$, $(1,\ 1)$ を通る放物線Cを考える。x 軸, y 軸およびCで囲まれる図形をx軸のまわりに回転してできる立体の体積が最小になるように k を定めよ。 (奈良県医大)

5 第2次導関数が $f''(x)=\dfrac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(a>0)$ である関数 $f(x)$ について, 次の各問いに答えよ。

(1) $f(0)=a$, $f'(0)=0$ とする。$f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上に2点 $\mathrm{A}(-a, f(-a))$, $B(a, f(a))$ をとる。弧 AB の長さを求めよ。 (山形大-医)

6 媒介変数 θ を用いて, 次の式で与えられる曲線がある。ただし $a>0$

$$x=a\cos^3\theta \qquad y=a\sin^3\theta \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) この曲線の長さを求めよ。

(2) この曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。 (大分医大)

7 (1) 曲線 $2y=e^x+e^{-x}$ の $0 \leqq x \leqq t$ $(t>0)$ の部分の長さ $s(t)$ を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。

(2) (1)の条件のもとで, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\{t-\log s(t)\}$ を求めよ。 (広島大-理系)

8 関数 $f(x)$ は偶関数であり, 正の定数aに対して $f(x+2a)=f(x)$ をみたす。また, $0 \leqq x \leqq a$ においては, $f'(x)=-f(x)$, $f(0)=1$ をみたす。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形を $-3a \leqq x \leqq 3a$ の範囲でかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の $-3a \leqq x \leqq 3a$ の範囲にある長さを求めよ。

(香川医大)

Hints

1 $\displaystyle\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$

2 $\cos A-\cos B$
$=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
$\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

3 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

4 $\displaystyle\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C$
$(a+1\neq 0)$

5 $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx$
$(t=g(x)$ とおく$)$
$\displaystyle=\int f(t)\,dt$
$\displaystyle\int e^{\frac{x}{a}}dx=ae^{\frac{x}{a}}+C$

6 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$
$\displaystyle=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
$\displaystyle=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

7 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{2t}}=0$

8 $f(x)=e^{-x}$ のとき
$f'(x)=-e^{-x}$
$1+\{f'(x)\}^2=1+e^{-2x}$
$\displaystyle\int_\beta^\alpha f(t)\,dt=-\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$

14 定積分の応用

☞解答は「解説と解答」p. 69

第14講座
数学III

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 84〜91 参照〕

1．定積分の概念を再確認
2．定積分で表された関数に慣れる。
3．定積分で表された関数の導関数
4．定積分で表された関数と定積分
5．積分を含む等式

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　関数 $F(x)=\int_0^1 \cos xt(1-\cos 2\pi t)\,dt$ は $x=0$ で極大値 $F(0)=1$ をとることを証明せよ。　（山梨医大）

(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(\int_1^x (t-x)\log t\,dt\right)$ を求めよ。　（東京医大）

●解答への Approach

(1)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$x(\neq 0)$ が 0 に近いならば

$$〔\quad〕<\cos xt\leqq〔\quad〕$$

$$\therefore\quad \cos xt(1-\cos 2\pi t)\leqq〔\qquad\qquad〕$$

$$\therefore\quad F(x)<〔\qquad\qquad〕\ (x\neq 0)$$

よって，$F(x)$ は $x=0$ で極大となる。極大値は

$$F(0)=\int_0^1\Big(〔\qquad\qquad〕\Big)dt=\Big[〔\qquad\qquad〕\Big]_0^1$$

$$=〔\quad〕\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

(2)　$\displaystyle\int_1^x (t-x)\log t\,dt=\int_1^x〔\qquad\qquad〕dt-x\int_1^x〔\qquad\qquad〕dt$

$$\therefore\quad 与式=\frac{d}{dx}\int_1^x〔\qquad\qquad〕dt-\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x〔\qquad\qquad〕dt\right)$$

$$=-\int_1^x〔\qquad\qquad〕dt=-\Big[〔\qquad\qquad〕\Big]_1^x$$

$$=〔\qquad\qquad〕\qquad\cdots\cdots\boxed{答}$$

解法の Points

← $a<x<b$ において，
$g(x)<f(x)$
ならば
$\int_a^b g(x)\,dx<\int_a^b f(x)\,dx$

← $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$
$(fg)'=f'g+fg'$
$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$
$\int \log t\,dt$
$=t\log t-\int t\cdot\dfrac{1}{t}\,dt$

例題2 実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ に対して，$F(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$ とする。

(1) $F''(x)+F(x)=f(x)$ となることを証明せよ。

(2) $F(x)=f(x)-xe^{-x}$ が成り立つ $f(x)$ を求めよ。 (北大-理系)

●解答への Approach

(1) $F(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$

$\therefore\ F(x)=\sin x\int_0^x [\qquad\qquad]dt-\cos x\int_0^x [\qquad\qquad]dt$ ……①

$\therefore\ F'(x)=\cos x\int_0^x [\qquad\qquad]dt+\sin x\int_0^x [\qquad\qquad]dt$ ……②

$F''(x)=-\sin x\int_0^x [\qquad\qquad]dt+\cos x\int_0^x [\qquad\qquad]dt$

$+([\qquad\qquad])f(x)$

$\therefore\ F''(x)=[\qquad]F(x)+[\qquad\qquad]$

$\therefore\ F''(x)+F(x)=f(x)$ ……③

(2) $F(x)=f(x)-xe^{-x}$ ……④

④を③に代入して

$F''(x)=[\qquad\qquad]$

x で積分して

$F'(x)=[\qquad\qquad]+C_1$ (C_1は積分定数)

さらに積分して

$F(x)=[\qquad\qquad]+C_1x+C_2$ (C_2は積分定数) ……⑤

①，②で $x=0$ のとき，$F(0)=0$，$F'(0)=0$ よって，

$C_1=[\qquad]$，$C_2=[\qquad]$ ……⑥

よって，④，⑤，⑥から，

$f(x)=[\qquad\qquad]$ ……答

解法の Points

←$\sin(\alpha-\beta)$
$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$(fg)'=f'g+fg'$
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

←$(fg)'=f'g+fg'$ から
$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$

例題3 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が連続で，すべての x に対して

$$(x^2+1)f(x)=\int_0^x\left\{t^2f'(t)+\frac{4t}{t^2+1}f(t)\right\}dt+1$$

が成り立つとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。 （九大-理系）

●解答への Approach

(1) 与式において，$x=0$ とおくと

$$f(0)=[\quad\quad] \qquad \cdots\cdots①$$

与式を x で微分すると

$$2x\,f(x)+(x^2+1)f'(x)=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\Big]$$

$$\therefore\ f'(x)=\Big(\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]\Big)f(x) \qquad \cdots\cdots②$$

$$\therefore\ \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\Big(\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]\Big)dx$$

$$\therefore\ \log|f(x)|=[\qquad\qquad\qquad\qquad]+C_0$$

$$\therefore\ f(x)=C\Big\{[\qquad\qquad\qquad\qquad]\Big\}\ (\text{ただし，}C=\pm e^{C_0})$$

ここで，①から　　$C=[\quad\quad]$

$$\therefore\ f(x)=[\qquad\qquad\qquad\qquad] \qquad \cdots\cdots③\ \boxed{答}$$

(2) ③を②に代入して

$$f'(x)=-2x(x+[\quad\quad])(x-[\quad\quad])([\qquad\qquad])e^{[\qquad\qquad]}$$

③から $f(x)$ は［　　］関数であり，

右の増減表から，

x	$\cdots$		$\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$
$f'(x)$							
$f(x)$							

$\boxed{答}$ $\begin{cases}\text{極大値：}\Big[\qquad\Big]\ (x=[\qquad\quad]) \\ \text{極小値：}[\qquad\quad]\ (x=[\qquad\quad])\end{cases}$

解法の Points

← $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ のとき

$F(a)=0$

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

$(fg)'=f'g+fg'$

← $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

← $f(x)$：偶関数（y 軸対称）

$\Longleftrightarrow f(-x)=f(x)$

$f(x)$：奇関数（原点対称）

$\Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 71)

1 (1) $F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt$ とするとき，次の式を証明せよ。

$$F'(x)=2f(2x)-f(x)$$

(2) $G(x)=\int_x^{2x} t\log t\ dt\ (x>0)$ について，$G(x)$ を最小にする x の値を求め，最小値を計算せよ。 (滋賀医大)

2 a を $0<a\leqq\frac{\pi}{2}$ をみたす定数とする。関数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin(\sqrt{t}+a)dt$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における最大値と最小値を求めよ。 (広島大-理系)

3 $0<x<1$ に対して $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ とする。

(1) $\frac{d}{dx}(f(\sqrt{1-x^2}))$ を求めよ。 (2) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を求めよ。

(3) $f(x)+f(\sqrt{1-x^2})=\frac{\pi}{2}$ を示せ。 (京都府医大)

4 $x\geqq\frac{\pi}{3}$ で定義された関数 $f(x)$ がつねに $xf(x)=x^2\sin x+\int_{\frac{\pi}{3}}^x f(t)dt$ をみたすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフ，x 軸，直線 $x=\frac{\pi}{3}$ および直線 $x=\pi$ で囲まれる図形の面積を求めよ。 (九州歯大)

5 関数 $f(x)$ が，$f(x)>0$，$f(x)f'(x)=x$ をみたし

$$2\int_0^x f(t)dt=xf(x)+\log(x+\sqrt{1+x^2})$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ は微分可能かつ $f'(x)$ は連続とする。 (香川医大)

6 $a\geqq 1$ のとき，$S(a)=\int_a^{a+1}\log x\ dx-\frac{1}{2}\{\log a+\log(a+1)\}$ とする。$S(a)$ は減少関数であることを示せ。 (熊本大-理系)

7 関数 $F(t)=\int_{-1}^1 |x-t|\,e^{-x}dx$ の，最小値を与える t を求めよ。 (福井医大)

8 $f(x)+2(x+1)e^{-x}+\int_0^x f(t)dt=0$ のとき，

(1) $\frac{d}{dx}(e^x f(x))=2x$ を示せ。

(2) $f(x)$ の極値を求めよ。 (愛媛大-理・工)

Hints

1 $u=g(x)$ とする。

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt$$
$$=\frac{d}{du}\int_a^u f(t)dt\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=f(u)g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

2 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=f(x)$

3 $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt$
$=f(g(x))g'(x)$

$\int_a^b+\int_b^c=\int_a^c$

4 $\int x\cos x dx$
$=\int x(\sin x)'dx$
$=x\sin x-\int\sin x\ dx$
$=x\sin x+\cos x+C$

5 求める関数は $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$\therefore\ \int_0^x\sqrt{1+t^2}\,dt$
$=\frac{1}{2}\{x\sqrt{1+x^2}$
$+\log(x+\sqrt{1+x^2})\}$

6 $\frac{d}{dx}\int_1^{g(a)} f(t)dt$
$=f(g(a))g'(a)$

7 $x>0$ のとき，
$x=e^{\log x}$

8 $f(x)$は微分可能と仮定してある。(2)は，まず$f(x)$を求める。

15 微積分融合問題

☞解答は「解説と解答」p. 74

第15講座
数学III

■この講座のねらい■ 〔「数学 β の完全整理」p. 34〜110 参照〕

1．微分の概念の再確認
2．積分の概念の再確認
3．微分・積分の融合問題
4．数列との融合問題
5．物理への応用

例題 1 任意の x に対して $f(x)=\sin x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x f'(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 f''(t)\,dt+1$ が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。（導関数 f'，f'' は連続である。） （東京女子医大）

●解答への Approach

$$f(x)=\sin x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x f'(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 f''(t)\,dt+1$$

$$\therefore\quad f(x)=\sin x+[\qquad]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt+[\qquad]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f''(t)\,dt+1$$

ここで，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\,dt=a$ ……①，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f''(t)\,dt=b$ ……②

とおくと，

$$f(x)=\sin x+a[\qquad]+b[\qquad]+1$$

$$\therefore\quad f'(x)=[\qquad\qquad] \quad\cdots\cdots③$$

$$f''(x)=[\qquad\qquad] \quad\cdots\cdots④$$

①と③から，　$a=\left[\qquad\qquad\right]$

②と④から，　$b=[\qquad]$

よって，求める $f(x)$ は

$$f(x)=\left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right] \quad\cdots\cdots\boxed{答}$$

解法の Points

← $\int_a^b f(x)g(t)\,dt$
$=f(x)\int_a^b g(t)\,dt$

← $a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+2bt+a)\,dt$
$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+a)\,dt$
$b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\sin t+2b)\,dt$
$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2b\,dt$

例題2 a を正の定数とする。xy 平面において，放物線 $y=-x^2+px+q$ は点 $(1,\ a)$ を通り，y 軸と正または 0 で交わるとする。この放物線と x 軸の正の部分との交点を $(t,\ 0)$ とし，不等式 $x\geqq 0,\ 0\leqq y\leqq -x^2+px+q$ をみたす部分の面積を S とする。

(1) t の動く範囲を a を用いて表せ。

(2) S を $a,\ t$ を用いて表せ。

(3) S を最小にする放物線 $y=-x^2+px+q$ を a を用いて表せ。 (名大-理系)

●解答への Approach

(1) 与放物線と x 軸の他の交点を $(s,\ 0)$ $(s\leqq 0)$ とすると，与放物線は

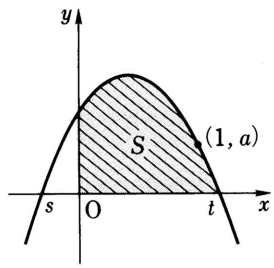
$$y=-(x-s)(x-[\qquad])$$

とおけて，点 $(1,\ a)$ を通るから，

$$s=\left[\qquad\qquad\right]$$

また，明らかに $t>1$ であり，$s\leqq 0$ から

$$1<t\leqq[\qquad]$$ ……① 答



(2) $S=\int_0^t y\,dx=\int_0^t\{-x^2+([\qquad])x-[\qquad]\}dx$

$$=\left[\qquad\qquad\qquad\right]$$ ……② 答

(3) $S'=\left[\qquad\right]t^2+\left[\qquad\right]t+\left[\qquad\qquad\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\qquad\right]\left(t-\left[\qquad\right]\right)\left\{1+\left[\qquad\qquad\right]\right\}$$

$[\qquad]^*<[\qquad]^*_*$ のとき，$t=[\qquad]$ で最小となり，

$[\qquad]^*_*\leqq[\qquad]^*$ のとき，$S'\leqq[\qquad]$

$t=[\qquad]$ で最小となる。

t	1	…	2	…	$a+1$
S'					
S					

t	1	…	$a+1$	…	2
S'					
S					

よって，$\begin{cases} 1<a \text{ のとき，} & y=-x^2(3-a)x+[\qquad] \\ 0<a\leqq 1 \text{ のとき，} & y=-x^2+(a+1)x \end{cases}$ ……答

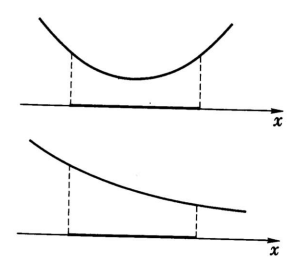
解法の Points

← $\int x^\alpha dx$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C & (\alpha\neq -1)\\ \log|x|+C & (\alpha=-1)\end{cases}$$

← $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

←



例題3 曲線 $x=f(y)$，$0\leqq y\leqq 30$ を y 軸のまわりに回転してできる底の平らな空の容器がある。以下，長さの単位を 1 cm とする。この容器に毎秒 $a\text{cm}^3$の割合で水を入れるとき，あふれだすまでは，t 秒後の水面の上昇速度が $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ cm／秒 であるとする。

(1) 何秒後に水面の高さが 18 cm になるか。

(2) 関数 $f(y)$ を求めよ。ただし，$f(y)$ は正の値をとるものとする。 （東北大）

●解答への Approach

(1) t 秒後の水面の高さを $y$cm とすると，$t=0$ のとき $y=0$ から，

$$y=\int_0^t\Big[\qquad\qquad\Big]dt=\Big[\Big[\qquad\qquad\Big]\Big]_0^t$$

$$\therefore\quad y=\Big[\qquad\qquad\Big]$$

$y=18$ のとき，　　$t=\Big[\qquad\Big]$（秒後）　……答

(2) t 秒後の容器中の水量を V，水面の面積を S とすると

$$\frac{dV}{dt}=\Big[\qquad\Big]\frac{dy}{dt}$$

いま，　$\dfrac{dV}{dt}=\Big[\qquad\Big]$

$S=\Big[\qquad\qquad\Big]$

であるから，

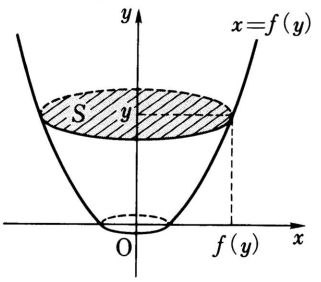
$$a=\pi\Big\{\Big[\qquad\Big]\Big\}^2\cdot\Big[\qquad\Big]$$

$$\therefore\quad \{f(y)\}^2=\Big[\qquad\qquad\Big]$$

$$=\Big[\qquad\qquad\Big]\ ((1)より)$$

$f(y)>0$ から，

$$f(y)=\Big[\qquad\qquad\Big]$$ ……答



解法の Points

← 上昇速度：$\dfrac{dy}{dt}$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt=\int(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

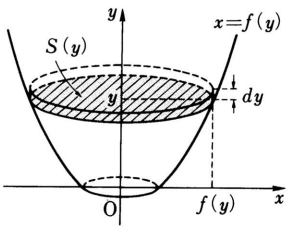
$$=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(1+t)^{-\frac{1}{2}+1}+C$$

← $S(y)=\pi\{f(y)\}^2$

$dV=S(y)\,dy$

$\left(\dfrac{dV}{dt}=S(y)\dfrac{dy}{dt}\right)$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$



トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 76)

1 x の関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_{x-1}^{x+1}\frac{t}{t^2+1}dt$ で定義する。$f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。 (山口大)

2 (1) 次の定積分の値を求めよ。

(i) $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx$ (ii) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx$

(2) $I(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{2}-a\sin x+\frac{a^2}{2}\sin 2x\right)^2dx$ (a：実数) とする。$I(a)$ が最小となる a の値を求めよ。 (金沢大-理系)

3 関数 $f(x)=ae^{bx}$ $(b\neq 0)$ が条件 $\int_0^1 f(x)dx=1$ をみたしている。

(1) a を b で表せ。 (2) $V=\int_0^1(f(x))^2dx>1$ を証明せよ。

(3) $\lim_{b\to 0}V$ を求めよ。 (名古屋市大-医)

4 k，n を自然数とし，$I_k=\int_0^{2n\pi}e^{-x}\sin\frac{k}{n}x\,dx$ とする。

(1) I_k を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_k$ を求めよ。 (福島県医大)

5 曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $(a,\ f(a))$ における接線が x 軸と点 $(a-1,\ 0)$ で交わり，かつ $f(0)=1$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq p<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}np^n=0$ を用いて $\sum_{n=1}^{\infty}nf(-n)$ の値を求めよ。

(熊本大-理系)

6 (1) $x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n}x^n=\log\frac{1}{1-x}-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$ $(0\leqq x<1)$

を証明せよ。ただし，n は正整数とする。

(2) $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cos nt\,dt$ のとき，a_n を a_{n-1} で表せ。

(3) (2)の a^n について $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_n$ の和を求めよ。 (弘前大)

7 $a>1$ のとき，曲線 $y=x+\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{a}\leqq x\leqq a\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる器に水を入れるものとする。

(1) 器の容積を求めよ。

(2) 水を器に入れる速さは，単位時間あたり体積 4 とし，また $a>6$ とする。水面が $y=6$ に達する瞬間の，水面の上昇する速さを求めよ。

(福井医大)

Hints

1 $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)}f(t)dt$
$=f(g(x))g'(x)$

2 $2\sin^2x=1-\cos 2x$
$2\sin x\sin 2x$
$=\cos x-\cos 3x$
$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx=\pi$ $(k=1,\ 2)$

3 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数は
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

4 $\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

5 $S_n=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}$
$rS_n=\quad r+r^2+r^3+\cdots+r^n$ (−
$(1-r)S_n=1-r^n$

6 $\cos(\alpha+\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$2\sin nt\sin t$
$=\cos(n-1)t-\cos(n+1)t$

7 $t=y^2-4$ とおくと $dt=2ydy$
$\int y\sqrt{y^2-4}\,dy=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{3}{2}}+C$