16 ――行列と連立１次方程式

☞解答は「解説と解答」p. 79

第16講座
数学C

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 112～125 参照〕

1．まず，２行２列の行列に慣れる。
2．行列の和・差は実数と同じ性質があるが，積と，特に商には気をつける。
3．特に，逆行列をしっかり理解する。
4．連立方程式を行列で表示できるようにする。
5．行列の性質を用いて連立方程式を解く。

さくらの個別指導
H25.03.13
さくら教育研究所

例題 1　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ について，

(1)　等式 $AB=BA$ が成り立つとき，A の成分の間にはどのような関係があるか。

(2)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，$AB=BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をみたす行列 A をすべて求めよ。

（東北大-理系）

●解答への Approach

(1)　$AB=\begin{pmatrix} [\quad\quad] & [\quad\quad] \\ [\quad\quad] & [\quad\quad] \end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix} [\quad\quad] & [\quad\quad] \\ [\quad\quad] & [\quad\quad] \end{pmatrix}$

$AB=BA$ から

$b^2=[\quad\quad]$ …①　　$ac+bd=[\quad\quad]$ …②

よって，求める条件は

$b=[\quad\quad]$ または「$b=[\quad\quad]$ かつ $a=[\quad\quad]$」　……答

(2)　与式から $[\quad\quad]+b^2=[\quad\quad]+c^2=1$，$[\quad\quad]+d^2=1$，

$[\quad\quad]+d^2=1$，$[\quad\quad]+bd=0$，$[\quad\quad]+cd=0$

これを解くと，行列 A は，次の４つである。

$[\quad\quad]$，$[\quad\quad]$，
$[\quad\quad]$，$[\quad\quad]$　……答

解法の Points

← $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{pmatrix}$

← $a^2+b^2=a^2+c^2$
$c^2+d^2=b^2+d^2$

← $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow$
$x=1$，$y=0$，$u=0$，$v=1$

例題2 行列 A を $A=\begin{pmatrix} a+2 & a+1 \\ -a-1 & a+2 \end{pmatrix}$（$a$ は実数）とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) Aが逆行列をもつことを示せ。　　(2) A^2 を求めよ。

(3) $A^5=A$ が成り立つとき，a の値を求めよ。　　（神戸大）

●解答への Approach

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$ad-bc=\Delta$ とおくと $\Delta \neq 0$ のとき逆行列は存在する。

$$\Delta=(a+2)^2+[\qquad\qquad]=[\qquad\qquad]a^2+[\qquad\qquad]a+[\qquad\qquad]$$

$$=[\qquad\qquad]\left(a+\left[\qquad\qquad\right]\right)^2+\left[\qquad\qquad\right]\geqq\left[\qquad\qquad\right]>0$$

（∵　a：実数）

よって，Aは逆行列をもつ。

(2) $A^2=\begin{pmatrix} [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \\ [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \\ [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \end{pmatrix}$ ……答

(3) (1)からAの逆行列 A^{-1} は存在するから，$A^5=A$ の両辺に A^{-1} をかけて

$$A^4=[\qquad\qquad] \quad \cdots\cdots①$$

このとき，$A^4=(A^2)^2$ であるから，(2)の結果を用いて

$A^4=\begin{pmatrix} [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \\ [\qquad\qquad] & [\qquad\qquad] \end{pmatrix}$

よって，①から要素の対応を考えると

$$\begin{cases} [\qquad\qquad]=1 & \cdots\cdots② \\ [\qquad\qquad]=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②と③から，求める a の値は

$$a=[\qquad\qquad],\ [\qquad\qquad] \quad \cdots\cdots答$$

解法の Points

← $ad-bc\neq 0$ のとき
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

← $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

← 単位行列
$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Eのかわりに I を使うこともある。

← 計算は展開をしない。

← $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow$
$a=x,\ b=y,\ c=u,\ d=v$

例題3 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} ax+by=4 & \cdots\cdots① \\ x+2y=c & \cdots\cdots② \end{cases}$$

●解答への Approach

まず，与式を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\quad\quad] \\ [\quad\quad] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [\quad\quad] \\ [\quad\quad] \end{pmatrix}$$

(i) $2a-b\neq 0$ のとき：

$$\begin{pmatrix} [\quad\quad] \\ [\quad\quad] \end{pmatrix}=\frac{1}{2a-b}\begin{pmatrix} [\quad\quad] & [\quad\quad] \\ [\quad\quad] & [\quad\quad] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\quad\quad] \\ [\quad\quad] \end{pmatrix}$$

(ii) $2a-b=0$ のとき：

$a=\dfrac{b}{2}=k$ とおくと　　$a=k,\ b=2k$

この a，b を①に代入して

$$kx+2ky=4 \qquad \cdots\cdots③$$

となる。$k=0$ のときは $0=4$ となり不合理であるから，$a=k\neq 0$

このとき，①と②は次のようになる。

$$\begin{cases} x+2y=[\quad\quad] & \cdots\cdots①' \\ x+2y=c & \cdots\cdots②' \end{cases}$$

ここで，

$$c=[\quad\quad]$$

のとき，与えられた連立方程式の解は直線 $x+2y=c$ 上のすべての点である。

また，

$$c\neq[\quad\quad]$$

のときは，解なしである。

よって，

答 (i) $2a-b\neq 0$ のとき：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=[\quad\quad\quad\quad\quad\quad]$$

(ii) $2a-b=0$ のとき：

(ア) $c=[\quad\quad]$ のとき，$x+2y=c$ 上のすべての点が解

(イ) $c\neq[\quad\quad]$ のとき，解なし

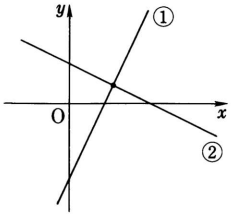
解法の Points

←A^{-1} が存在すると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

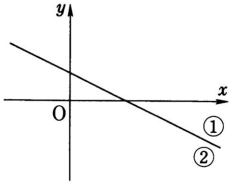
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(i) $2a-b\neq 0$ のとき：

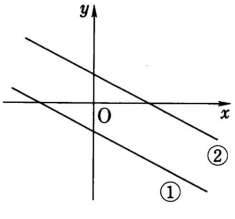


(ii) $2a-b=0$ のとき：

(ア)



(イ)



←(ア) 任意の実数 t に対して

$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{2}(-t+c) \end{cases}$$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 81)

1 行列A，$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ が $PAP=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ をみたすとき

(1) A^2 を求めよ。　(2) A^3 を求めよ。

(3) A^n を求めよ。ただし，nは正整数とする。　(群馬大-医)

2 a，b，c，d，p，q，r，s は実数であって，3つの行列

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

について，等式 $AB=E$ が成り立っている。

(1) $ad\neq bc$ を証明せよ。　(2) $BA=E$ を証明せよ。

(3) nが正整数であるとき，$(ad-bc)^{2n}+(ps-qr)^{2n}$ の最小値を求めよ。

(大分医大)

3 $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。$AX=XB$ をみたす零行列でない 2×2 行列 X が存在するような実数aの値を求めよ。　(横浜市大-理系)

4 Aは逆行列をもつ2次の行列で $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 4\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & -6\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ である。このとき，aとAを求めよ。　(東京慈恵会医大)

5 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が $A^2+A=-E$ をみたすとする。このとき，2次方程式 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ の解の3乗は1となることを示せ。ただし，a，b，c，d は実数とし，Eは単位行列とする。　(北大)

6 nを自然数とする。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ のとき，$(A^{-1})^n$ を求めよ。

(2) $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ で，行列Bが $BPA=P$ をみたすとき，B^n を求めよ。

(福島県医大)

7 実数 a，b に対して行列 A，B を次のように定め，Eは単位行列とする。

$$A=\begin{pmatrix}a-\frac{1}{2} & -b\\ b & \frac{\sqrt{5}}{2}-a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(1) aをどのように与えても，$B=A^{-1}$ が成り立つようにbが選べることを示せ。

(2) bを(1)のように選んだとき，$(A+A^{-1})^2+(A+A^{-1})$ を求め，$A^5=E$ を示せ。　(名大-理系)

8 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases}ax+4y=2\\ -x+2y=b\end{cases}$$

Hints

1 $P^2=\frac{1}{5^2}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
のとき，
$ad-bc=1$
また，
(相加平均)≧(相乗平均)

3 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$：零行列

4 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が逆行列をもたない
$\Longleftrightarrow$ $ad-bc=0$

5 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ のとき，
$A^2-(a+d)A$
$+(ad-bc)E=O$
(ケーリー・ハミルトンの公式)

6 数学的帰納法：
自然数を含む命題 $P(n)$ で
(1) $n=1$ のとき $P(1)$ は真
(2) $P(k)$ が真$\Rightarrow P(k+1)$ も真
このとき，$P(n)$ はすべての自然数nに対して真

7 x^5-1
$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

8 $ax+by+c=0$ $(b\neq0)$ を次のように表すことがある。
t を任意の実数とする
$$\begin{cases}x=t\\ y=-\frac{a}{b}t-\frac{c}{b}\end{cases}$$

17 ――放物線・楕円・双曲線

☞解答は「解説と解答」p. 84

第17講座
数学C

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 126〜140 参照〕

1．放物線は焦点 F と準線 l のそれぞれからの距離が等しい点の軌跡であることを理解する。

2．$y^2=x$ を $y=x^2$ と同様に扱えるようにする。

3．楕円は2つの焦点 F と F′ からの距離の和が一定である点の軌跡である。

4．楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は円 $x^2+y^2=r^2$ とよく似ている図形であることを理解する。

5．双曲線は2つの焦点 F，F′ からの距離の差が一定である点の軌跡である。

6．双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は楕円とよく似ているが，グラフは全く異なる。

例題 1　$\lambda>0$ と a は定数とする。座標平面上に放物線 C：$y=x^2$ と点 A$(0,\ a)$ がある。放物線 C 上の点Pに対して，点Qを $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が y 軸の負方向と同じ向きで $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}}=\lambda$ となるように定める。点Pが放物線 C 上動くときの点Qの軌跡 C' は，y 軸を軸とする放物線になるという。

(1)　a の値を求めよ。　　(2)　放物線 C' の焦点と準線を λ で表せ。

(3)　放物線 C と C' が合同となるときの λ の値を求めよ。　　（東京理大-薬）

●解答への Approach

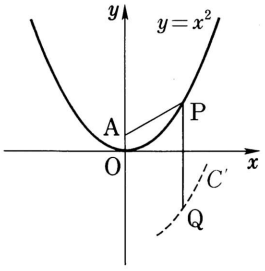
(1)　P$(x,\ x^2)$ とすると，

AP＝〔　　〕

∴　Q$(x,$〔　　〕$)$

これから，C' の方程式は

y＝〔　　〕　……①



①の右辺が x の2次式となるのは，根号内が完全平方でなくてはならないから，判別式＝0

よって，　　a＝〔　　〕　……答

(2)　a＝〔　　〕のとき，$\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}$＝〔　　〕

①から，　　$x^2=4\cdot$〔　　〕$\left(y+$〔　　〕$\right)$

よって，

焦点 $\left(0,\ \right.$〔　　〕$\left.\right)$，準線 y＝〔　　〕　……答

(3)　C と C' が合同であれば，x^2 の係数を比較して，$\lambda>0$ から

λ＝〔　　〕　……答

解法の Points

← $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ の距離は $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

← $ax^4+bx^2+c=a(x^2+k)^2$ となる k が存在するための条件は $b^2-4ac=0$

← $y^2=4px$
焦点：$(p,\ 0)$
準線：$x=-p$

例題2 a, $b \geqq 0$ とする。点 $(1, 0)$ と直線 $ax+by+3=0$ の距離は 2 である。

(1) 点 (a, b) のえがく曲線を図示せよ。

(2) $a+b$ の最大値と最小値を求めよ。 (東海大-医・理)

●解答への Approach

(1) 点 $(1, 0)$ と直線 $ax+by+3=0$ との距離は 2 であるから

$$\frac{|[\qquad\qquad]|}{\sqrt{[\qquad]}}=2$$

$a \geqq 0$ から,

$$[\qquad]=2\sqrt{[\qquad]}$$

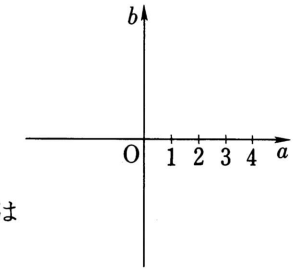
平方して整理すると, 点 (a, b) のえがく曲線は

[ ]

$$\frac{[\qquad]}{[\qquad]}+\frac{[\qquad]}{[\qquad]}=1 \quad (a \geqq 0,\ b \geqq 0) \qquad \cdots\cdots①$$

の弧である。

グラフは右上図の実線部分である。



(2)

$$a+b=k \qquad \cdots\cdots②$$

とおき, 直線②が①と共有点をもつような k の最大値・最小値を求める。

k の最大値は, ②が①に [ ] ときで, ①, ②から b を消去した a の 2 次方程式は [ ]=0 である。

判別式=[ ] と, $k \geqq 0$ であることに注意すると,

$$k=[\qquad]$$

このとき, $a=\left[\qquad\right]$, $b=\left[\qquad\right]$

また, k の最小値は, ②が点 $\left([\qquad], \left[\qquad\right]\right)$ を通るときで,

$$k=\left[\qquad\right]$$

答 $\begin{cases} \text{最大値 } [\qquad] \left(a=\left[\qquad\right],\ b=\left[\qquad\right]\right) \\ \text{最小値 } \left[\qquad\right] \left(a=[\qquad],\ b=\left[\qquad\right]\right) \end{cases}$

解法の Points

← 点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ との距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

← 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において, $a>b$ のとき, $2a$ を長軸の長さ, $2b$ を短軸の長さといい, 焦点は $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ である。

← $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の判別式 D は

$$D=b^2-4ac$$

← $\begin{cases} \dfrac{(a-1)^2}{4}+\dfrac{b^2}{3}=1 & \cdots\cdots③ \\ a+b=1+\sqrt{7} & \cdots\cdots④ \end{cases}$

$a-1=\sqrt{7}-b$ を③に代入すると

$$(7b-3\sqrt{7})^2=0$$

例題3 双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 (x_1, y_1)（ただし，$x_1>0$）における接線が2つの漸近線と交わる点をP，Qとする。

(1) 点P，Qの座標を求めよ。

(2) x_1 を変化させるとき，点Pを通り漸近線に垂直な直線と，点Qを通り漸近線に垂直な直線との交点の描く図形を図示せよ。

（川崎医大）

●解答への Approach

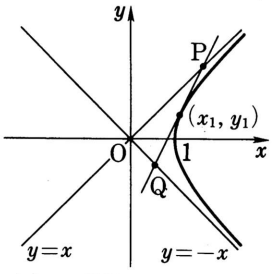
(1) $x^2-y^2=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$$\left[\qquad\qquad\right]=1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，$x^2-y^2=1$ の漸近線は 〔　　〕$=0$

よって，

$$y=x,\ y=〔\qquad〕$$



これと①との交点の x 座標は，P(前の方)，Q(後の方) の順に

$$x=\left[\qquad\qquad\right],\ \left[\qquad\qquad\right] \quad (\because\ x_1{}^2-y_1{}^2=1)$$

$$\therefore \begin{cases} \mathrm{P}(〔\qquad〕,\ 〔\qquad〕) \\ \mathrm{Q}(〔\qquad〕,\ 〔\qquad〕) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\boxed{答}$$

(2) Pを通り漸近線 $y=x$ に垂直な直線は

$$y=〔\qquad〕(x-〔\qquad〕)+〔\qquad〕 \qquad \cdots\cdots②$$

Qを通り漸近線 $y=〔\qquad〕$ に垂直な直線は

$$y=〔\qquad\qquad\qquad〕 \qquad \cdots\cdots③$$

②と③から，$x_1>0$ であることに注意すると

$$x_1=\left[\qquad\right]\ (〔\qquad〕>0),\ y_1=\left[\qquad\right]$$

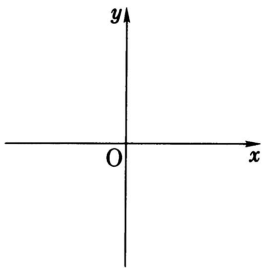
(x_1, y_1) は $x^2-y^2=1$ 上の点であるから，

求める図形の方程式は

$$\left[\qquad\qquad\right]=1 \quad (〔\qquad〕>0)$$

で右図の実線。

（PとQを入れかえても同じ結果が得られる。）



解法の Points

←$x^2-y^2=1$ ……①

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{x^2-1}$$

$$y=\sqrt{x^2-1},\ y=-\sqrt{x^2-1}$$

と別々に考えることにする。

$$y=\pm\sqrt{x^2-1}$$

は $x^2-1>0$ $(y\neq 0)$ で微分可能であるから，この範囲で①の両辺を x で微分すると

$$2x-2yy'=0$$

$$\therefore\ y'=\frac{x}{y}$$

よって，①上の (x_1, y_1) での接線は

$$y=\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \qquad \cdots\cdots②$$

ここで $x_1{}^2-y_1{}^2=1$ から，②を整理すると

$$x_1x-y_1y=1 \qquad \cdots\cdots③$$

一般に

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

この①の上の点 (x_1, y_1) での接線は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

●合成関数の微分法：

$$z=z(y(x))$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 86)

1

(1) $y^2=x$ の焦点と準線の方程式を求めよ。 (日本大-歯)

(2) $y=x^2+4x$ の焦点と準線を求めよ。 (愛知大-経済)

2

放物線 $x^2=4py$ の準線上の点よりこの曲線に2本の接線をひく。

(1) 2本の接線のなす角は一定であることを示し，その角を求めよ。

(2) 2つの接点の中点の軌跡を求めよ。 (大分大-工)

3

(1) 傾きmの直線が放物線 $y^2=8x$ に接するとき，この直線の方程式と接点の座標をそれぞれ求めよ。ただし，$m>0$ とする。

(2) (1)の放物線上の点Pと円 $(x+3)^2+(y-9)^2=18$ 上の点Qとを結ぶ線分の長さが最小となるように，点Pと点Qの座標をそれぞれ求めよ。

(長崎大-経済)

4

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に定点 A$(2, 0)$，B$(-2, 0)$，動点 P$(2\cos\theta, \sin\theta)$，Q$(2\cos\theta, -\sin\theta)$ がある。

(1) 直線 AP の方程式を求めよ。

(2) 2直線 AP，BQ の交点の軌跡の方程式を求めよ。 (昭和薬大)

5

Cを楕円 $x^2+4y^2=5$ とする。点 P$(0, 2)$ を通る直線で，Cの2つの焦点を結ぶ線分と交わり，Cとの2つの交点のx座標の差の絶対値が1となるものをすべて求めよ。 (東北大-文系)

6

xy 平面において，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の周上で $y\geqq 0$ の部分をLとする。

また2つの円 $(x-1)^2+y^2=1$，$(x+1)^2+y^2=1$ の周上で $y\leqq 0$ の部分をそれぞれM，Nとする。このときL，M，N上の動点P，Q，Rに対し線分 PQ と PR の長さの和の最大値を求めよ。 (東京工大)

7

点 P(p, q) から双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ に直交する2本の接線がひけるとき，点Pの軌跡を求めよ。 (浜松医大)

8

xy 平面において，x軸上に中心をもつ半径2の円が，$x^2-y^2=1$ と $x>0$ なる2点で接する。このとき，その円の方程式およびその接点の座標を求めよ。ただし，双曲線と円とが点Pで接するとは，それら2曲線がPを通り，それらのPにおける接線が一致することをいう。 (琉球大-理系)

9

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点を F，F′ とし，座標の原点をOとする。このとき双曲線上の任意の点 P(x, y) が $\mathrm{PO}^2=\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF'}$ をみたすための条件をa，b で表せ。 (城西大-薬)

Hints

1 $y^2=4px$ のとき
焦点 $(p, 0)$，準線 $x=-p$

2 $y=mx$，$y=m'x$ が直交しているための必要十分条件は
$$mm'=-1$$

3 $y=f(x)$ 上の点 (x_0, y_0) における法線の方程式は
$$y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+y_0$$

4 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線は $x_2-x_1\neq 0$ のとき，
$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$$

5 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点は
$(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

6 楕円は2つの定点までの和が一定である点の軌跡。

7 $y=mx$ と $y=m'x$ が直交するための必要十分条件は
$$mm'=-1$$

8 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線は
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

9 2定点F，F′から距離の差が一定であるような点の軌跡を双曲線という。

18 ――曲線の媒介変数表示・極座標表示

☞解答は「解説と解答」p. 89

第18講座
数学C

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 141～147 参照〕

1．曲線の表し方にいろいろな方法があることを知る。

2．単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 (x, y) は $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ と表示される。

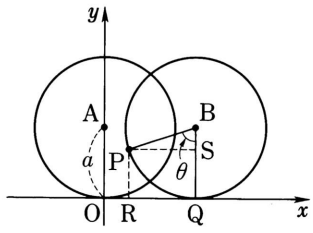
3．一般に，曲線 C 上の点 (x, y) は $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表示される。

4．点Pを原点からの距離 r と x 軸の正の部分の始線からの回転角 θ を用いて，Pを (r, θ) で表現する。この表し方を極座標という。これを理解する。

例題 1　半径 a の円が，x 軸上をすべらずにころがるとき，その周上に固定された点Pの軌跡の方程式を求めよ。

●解答への Approach

Pを x 軸上の〔　　〕にとる。



この円の中心をAとし，この円がころがって中心がBまできたとき，円と x 軸との接点をQとし，Pから x 軸およびQBにひいた垂線の足をそれぞれR，Sとする。

このとき，Pの座標を (x, y) とし，

$$\angle PBQ=\theta$$

とおくと，円弧 $\overset{\frown}{PQ}$ の長さは〔　　〕となる。

よって，

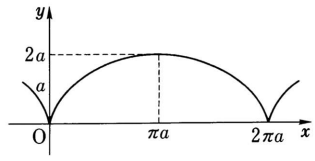
$$x=OR=OQ-〔\quad\quad〕=〔\quad\quad〕-PS$$
$$=〔\quad\quad〕-a\times〔\quad\quad〕$$
$$y=RP=QS=QB-〔\quad\quad〕$$
$$=〔\quad\quad〕-a\times〔\quad\quad〕$$

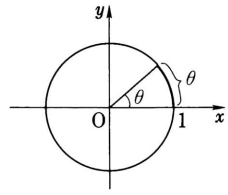
したがって，Pの軌跡は θ を媒介変数として，次の式で表される。

$$\begin{cases} x=a(〔\quad\quad〕-〔\quad\quad〕) \\ y=a(〔\quad\quad〕-〔\quad\quad〕) \end{cases}$$ ……答

解法の Points

←特に，主役となる点を原点にとって見やすくする。





←左の方程式で表される曲線を
サイクロイド
という。

例題2 次の問いに答えよ。

(1) 極を通らない直線の極方程式は，次の形で表されることを示せ。

$$r\cos(\alpha-\theta)=p\ (p>0)$$

(2) 点 $(p, 0)$ を焦点として，x 軸上の点 $(-p, 0)$ を通って x 軸に垂直な直線を準線とする放物線の極方程式は，次の式で表されることを示せ。ただし，$p>0$ とする。

$$r=\frac{4p\cos\theta}{\sin^2\theta}\quad\left(|\theta|\leqq\frac{\pi}{2},\ \theta\neq 0\right)$$

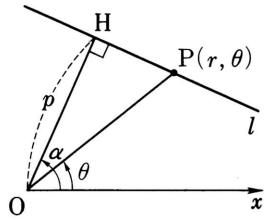
●解答への Approach

(1) 与えられた直線を l とし，l 上の任意の点を $P(r, \theta)$，極Oから l にひいた垂線を OH とする。

このとき，$OH=p$，$\angle xOH=\alpha$ とおくと，

〔　　〕cos(〔　　〕$-\theta$)=〔　　〕

$(p>0)$



(2) 焦点 $F(p, 0)$ とする。放物線上の任意の点を $P(r, \theta)$ とし，Pから準線にひいた垂線を PH とする。

放物線の定義から

FP=〔　　〕　　……①

また，

HP=〔　　〕$+r\times$〔　　〕

さらに，〔　　〕定理から

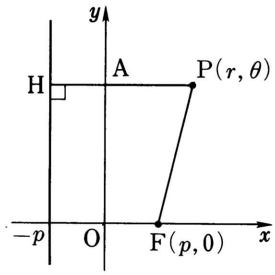
FP^2=〔　　〕

よって，θ を $-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ で考えると，①の両辺の2乗から

r(〔　　〕)=〔　　〕　($|\theta|\leqq$〔　　〕，$\theta\neq$〔　　〕)

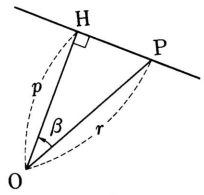
よって，

r=〔　　〕　($|\theta|\leqq$〔　　〕，$\theta\neq$〔　　〕)

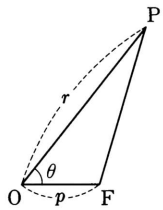


解法の Points

←



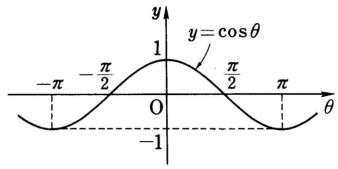
$r\cos\beta=p$



←余弦定理から

$FP^2=p^2+r^2-2pr\cos\theta$

←



例題 3 半径が $2a$ $(a>0)$ の円板とその周上に固定された点Pがある。最初，円板の中心が $(-2a,\ 0)$，点Pが $(0,\ 0)$ にある。この円板がサイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ に上側から接しながら，すべることなく回転する。

円板とサイクロイドの接点を $\mathrm{Q}(a(\beta-\sin\beta),\ a(1-\cos\beta))$ $(0<\beta<2\pi)$，そのときの円板の中心をCとして次の問いに答えよ。ただし，2曲線が接するとは，その接点において接線を共有することをいう。

(1) サイクロイドと接した点からなる弧を含む扇形 PCQ の面積を求めよ。

(2) Cの座標を求めよ。 （富山医薬大）

●解答への Approach

(1) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

$$\frac{dx}{d\theta}=[\qquad\qquad],\ \frac{dy}{d\theta}=[\qquad\qquad] \qquad \cdots\cdots①$$

題意から，円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ の長さは，サイクロイドの弧 $\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}$ の長さに等しいから，

$$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}\text{ の長さ}=\int_0^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=a\int_0^\beta\sqrt{[\qquad\qquad]}\,d\theta$$

$$=2a\int_0^\beta\sin\left[\qquad\right]d\theta=4a\left(\left[\qquad\qquad\right]\right)$$

よって，　中心角 $\angle\mathrm{PCQ}=\left[\qquad\qquad\right]$

$\therefore$ 扇形 PCQ の面積 $=\left[\qquad\qquad\right]$ ……答

(2) $\dfrac{dy}{dx}$ は接線の傾きであるから，サクロイド上の点Qでの簡単なベクトル表示は，①から　$([\qquad],\ [\qquad])$

この接線に直交する方向(法線方向)で，y 座標が正で，長さが1であるベクトルを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n}=\left(-\cos\left[\qquad\right],\ \sin\left[\qquad\right]\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=[\qquad]\,\vec{n}$$

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+[\qquad]\,\vec{n}$

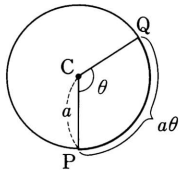
$\therefore$ $\mathrm{C}\left(\left[\qquad\qquad\right],\ \left[\qquad\qquad\right]\right)$

……答

解法の Points

← 線素を ds とおくと
$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$
$=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

← $\begin{cases} 1=\cos^2\theta+\sin^2\theta \\ \cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta \end{cases}$



← 扇形 PCQ の面積
$=\dfrac{1}{2}a\cdot a\theta=\dfrac{1}{2}a^2\theta$

← $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

← $y=mx$ と $y=m'x$ が直交するための必要十分条件は
$mm'=-1$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 91)

1 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上の点Pから x 軸にひいた垂線が円 $x^2+y^2=a^2$ と交わる点をQとする。このとき，Pの座標を，OQ と x 軸のなす角 θ で表して，媒介変数 θ による楕円の方程式を導け。

2 $x^2+y^2=1$ が x 軸と交わる点を A，A′ とし，円上の点Pと A′$(-1, 0)$ を通る直線の傾きを t とし，t を媒介変数としてこの円を表せ。(ただし，点 A′ は除く。)

3 与えられた円板に糸が巻きつけてある。その糸の端Pが点Aで終わっている。この糸を引っぱりながら点Aからほどくとき，糸の端Pがえがく曲線の方程式を求めよ。

4 半径 a の円Oの外側を，半径 b の円Cがすべることなくころがるとき，円Cの周上の定点Pがえがく軌跡は次の式で表されることを証明せよ。

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{cases}$$

5 極方程式 $r=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ について

(1) θ の値に対する r の値を求め，この方程式で表される曲線をえがけ。

(2) この方程式を直角座標で表し，この曲線を判定せよ。

6 放物線，楕円または双曲線の1つの焦点Fを極とし，Fからこれに対応する準線 g に垂線 FA をひき，AF をFの方へ延長した半直線 Fx を始線とする。曲線上の点 P(r, θ) から g と始線にそれぞれ垂線 PB，PC をひき，$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{BP}}=e$ とする。このとき，$r=\dfrac{l}{1-e\cos\theta}$ であることを示せ。また，$0<e<1$ ならば楕円，$e=1$ ならば放物線，$e>1$ ならば双曲線であることを示せ。

7 極座標で，定点 (r_0, α) を中心とする半径 a の円の極方程式は

$$r^2-2r_0r\cos(\theta-\alpha)+r_0{}^2=a^2$$

で表されることを示せ。

8 次の極方程式を満足する点 (r, θ) はどのような曲線をえがくか図示せよ。

(1) $r=2\cos2\theta$　　(2) $r=2\cos3\theta$

9 次の方程式を満足する点 (r, θ) はどのような曲線をえがくか図示せよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ とする。

(1) $r=2\theta$ ($r=k\theta$ $(k\neq0)$ の曲線をアルキメデスのうずまき線という)

(2) $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ (この曲線を心臓形という)

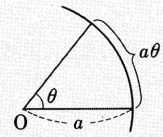
Hints

1 原点を中心とし，半径が a である円は，動径の角 θ を媒介変数にとれば $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$

2 傾きが m で点 (x_0, y_0) を通る直線の方程式は

$$y=m(x-x_0)+y_0$$

3



4 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

5 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

6 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$：楕円

$y^2=4px$：放物線

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$：双曲線

7 余弦定理

8 表をつくる。

9 (2)は x 軸対称

19 数値計算

☞解答は「解説と解答」p. 94

第19講座
数学C

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 148〜153 参照〕

1．これまで学んできた微積分の意味を十分理解し，それを応用できるようにする。
2．簡単な方程式でも解を求めることは大変であるが，それを近似的にとらえられる。
3．面積を求めることは古くから大変であっが，それを区分求積法でもう一度みなおす。
4．面積を近似的に求めることを通して数学的な考え方を育てる。
5．シンプソンの公式の考え方に慣れるようにする。

例題 1　曲線 $y=x^3$ ……①　がある。x 軸上の点列 P_1，P_2，… と曲線①上の点列 Q_1，Q_2，… は次のようになっているとする。直線 P_nQ_n は y 軸に平行で，直線 $P_{n+1}Q_n$ は点 Q_n で曲線①に接している。いま P_n の x 座標を x_n（ただし $x_1=1$）とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　x_n と x_{n+1} の関係式を求めよ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\triangle P_nQ_nP_{n+1}$ の面積 S_n と $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。　（山形大-工）

●解答への Approach

(1)　$Q_n(x_n, x_n^3)$ における $y=x^3$ の接線の方程式は

$$y=\left[\qquad\qquad\qquad\right]$$

これと x 軸との交点が P_{n+1} であるから

$$x_{n+1}=\left[\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots 答$$

(2)

$$x_n=\left[\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots 答$$

(3)　$P_{n+1}P_n=x_n-x_{n+1}=\left[\qquad\qquad\right]$

$$\therefore\quad S_n=\left[\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots 答$$

$0<\left[\qquad\qquad\right]<1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\left[\qquad\qquad\right] \quad \cdots\cdots 答$$

解法の Points

←曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

であるから，この接線と x 軸との交点の x 座標は

$$\boldsymbol{x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}} \quad (f'(a)\neq 0)$$

←$0<r<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n=1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

例題2 次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\sum_{k=n+1}^{2n}\log k-n\log n\}=\int_1^2\log x\,dx$ を示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。 (北大-理系)

●解答への Approach

(1) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\sum_{k=n+1}^{2n}\log k-n\log n\}$

とおく。

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\Big[\qquad\Big]$$

これは〔　　〕の〔　　〕≦x≦〔　　〕の部分をn等分して考えた区分求積法による定積分である。すなわち

$$I=\int_1^2\log x\,dx$$

(2) $P_n=\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおく。両辺の対数をとると

$$\log P_n=\frac{1}{n}\log\Big[\qquad\qquad\qquad\Big]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\Big[\qquad\Big]$$

よって，(1)から

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\Big[\qquad\Big]=\int_1^2\Big[\qquad\Big]dx=\log\Big[\qquad\Big]$$

e^x は連続関数であるから

$$e^{\lim_{n\to\infty}\log P_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\log P_n}=\lim_{n\to\infty}P_n$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n=e^{\log\Big[\qquad\Big]}=\Big[\qquad\Big]$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_n=\Big[\qquad\Big]$$ ……答

解法の Points

← $\sum_{k=1}^{n}a_n-nb=\sum_{k=1}^{n}a_n-\sum_{k=1}^{n}b$
$=\sum_{k=1}^{n}(a_n-b)$

← $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_1^2 f(x)\,dx$

← $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$
${}_n\mathrm{C}_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
$=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

← $f(x)$ が連続であるとき
$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)$

← $e^{\log a}=a$

例題3 区間 $[a, b]$ を $2n$ 等分し，$\dfrac{b-a}{2n}=h$ とおく。$x_k=a+kh$ $(k=0, 1, \cdots, 2n)$ とし，$f(x_k)=y_k$ とする。このとき，$[a, b]$ 上で $f(x)\geqq 0$ となる $f(x)$ に対して，次のシンプソンの公式と呼ばれる近似式が得られる。これを証明せよ。

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}\{y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}\}$$

●解答への Approach

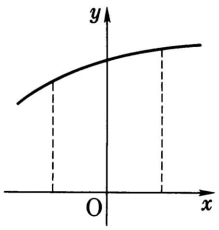
曲線の近似として，1次式で表される直線を扱うこともあるが，ここでは，x の2次式である放物線で近似させる。

まず，3点 $(-h, y_0)$，$(0, y_1)$，(h, y_2) を通る放物線を

$$y=px^2+qx+r \qquad \cdots\cdots①$$

とする。

$$S=\int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)\,dx=\Big[\qquad\qquad\Big]$$



また，①から

$y_0=[\qquad\qquad]$，$y_1=[\qquad]$，

$y_2=[\qquad\qquad]$

よって，

$$S=\frac{h}{3}([\qquad\qquad])$$

となり，S は h，y_0，y_1，y_2 で表される。

よって，重なり合う図形は面積が等しいから

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}([\qquad\qquad])$$

同様にして

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}([\qquad\qquad])$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

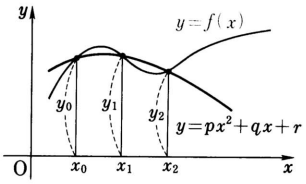
$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}([\qquad\qquad])$$

これらを辺々加え合わせると，$x_0=a$，$x_{2n}=b$ であるから

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{3}\Big\{[\qquad]+4\Big[\qquad\qquad\Big]$$
$$+2\Big[\qquad\qquad\Big]+[\qquad]\Big\}$$

解法の Points

←



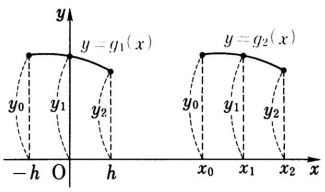
←$\dfrac{2}{3}ph^3+2rh$

$=\dfrac{h}{3}(2ph^2+6r)$

$=\dfrac{h}{3}\{(ph^2-qh+r)+4r$

$\quad+(ph^2+qh+r)\}$

$=\dfrac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$



$x_2-x_1=x_1-x_0=h$

トレーニング・コーナー

(☞解答は「解説と解答」p. 96)

1 方程式 $x^3-4x-6=0$ の 2 と 3 の間にある解を，小数第 1 位まで求めよ。

2 正の数 a の n 乗根をニュートン法によって計算する式は，次のようになることを示せ。

$$x_{k+1}=\frac{(n-1)x_k{}^n+a}{nx_k{}^{n-1}}$$

3 $a_n=\sqrt{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ に対して，

$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} a_i$，$T_n=\sqrt[n]{a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot\cdots\cdot a_{2n}}$ とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{\sqrt{n}}$$

の値を求めよ。 (神戸大-理系)

4 自然数 n $(n>2)$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_1^n \log x\,dx<\sum_{k=1}^{n}\log k<\int_1^{n+1}\log x\,dx$$

(宮崎医大)

5 α，r は実数で，$r>1$，$r\neq 3$，$r\neq 4$ とする。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^\alpha}{(n+k)^r}=\frac{r-3}{(r-1)(r-4)}$$

が成り立つような α および r の値を求めよ。 (山口大-理系)

6 関数 $f(x)=x^s$ $(s>0)$ を考える。区間 $\left[1,\ 1+\dfrac{1}{s}\right]$ を n 等分し，その等分点を $x_0=1$，x_1，x_2，$\cdots$，x_{n-1}，$x_n=1+\dfrac{1}{s}$ とするとき

$$J_n(s)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}\ \text{とおく。}$$

(1) $J(s)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n(s)$ を求めよ。

(2) $\{J(s)\}^{\frac{1}{s}}$ は単調減少関数であることを示せ。 (東京理大-理)

7 区間 $[a, b]$ を n 等分し，区間の分点を $x_0=a$，x_1，$\cdots$，$x_n=b$ とし，これらに対する $y=f(x)$ の値を y_0，y_1，$\cdots$，y_n とする。このとき，曲線を直線で近似すると，次の台形公式と呼ばれる近似式が得られることを示せ。

$$\int_a^b f(x)\,dx\fallingdotseq\frac{h}{2}\{y_0+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+y_n\}\quad\left(\begin{array}{l}\text{ここで}\\ nh=b-a\end{array}\right)$$

8 区間 $[0, 10]$ を10等分して，シンプソンの公式と台形公式を用いて $\displaystyle\int_0^{10}x^3dx$ の近似値をそれぞれ求め，真の値と比較せよ。

Hints

1 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2 $x^n-a=0$
$f(x)=x^n-a$ とおく。

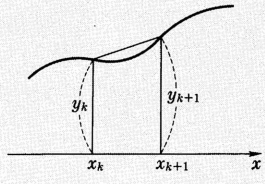
3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$
$\displaystyle=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$

4 $\displaystyle\log k<\int_k^{k+1}\log x\,dx$
$\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx=\log(k+1)$

5 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^\alpha=\begin{cases}\infty\text{に発散} & (\alpha>0)\\ 1 & (\alpha=0)\\ 0 & (\alpha<0)\end{cases}$

6 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log f\left(1+\frac{k}{ns}\right)$
$\displaystyle=\int_0^1\log f\left(1+\frac{x}{s}\right)dx$

7



8 近似公式をていねいに使う。

20 統計処理

☞解答は「解説と解答」p. 99

第20講座
数学C

■この講座のねらい■　〔「数学 β の完全整理」p. 154〜167 参照〕

1．資料の代表値の1つである平均を理解する。

2．標準偏差の2乗が分散であるが，この分散は平均までの距離の2乗の平均である。

3．同じ資料について2種類の変量の関係を調べる相関係数を理解する。

4．標準正規分布 N(0, 1) の分布曲線の方程式(確率密度関数)は $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

5．母平均が未知のとき，これを標本調査を通して推測する母平均の推定を理解する。

例題 1　次の各問いに答えよ。

(1)　サイコロを2個同時に振り，出た目の和の分散を求めよ。　(自治医大)

(2)　1つのサイコロを2回投げて，出る目を順に10の位，1の位の数として2桁の数 X をつくり，X を4で割った余りを Y とする。このとき，確率変数 Y の期待値と分散を求めよ。　(福島県医大)

●解答への Approach

(1)　2つのサイコロの目 X，Y の出方は〔　　〕だから

$$V(X+Y)=〔\qquad\qquad〕$$

1つのサイコロの目について，

$$E(X)=\left[\qquad\right],\quad V(X)=\left[\qquad\right]$$

$V(Y)=〔\qquad〕$ から　　$V(X+Y)=\left[\qquad\right]$　……答

(2)　$Y=0$ となる X の値は〔　　〕

$Y=1$ となる X の値は〔　　〕

$Y=2$ となる X の値は〔　　〕

$Y=3$ となる X の値は〔　　〕

よって，　$P(Y=k)=\left[\qquad\right]$ $(k=0, 1, 2, 3)$ であるから

$$E(Y)=\left[\qquad\right]$$　……答

$$E(Y^2)=\left[\qquad\right]$$

ゆえに，　$V(Y)=\left[\qquad\right]-\left[\qquad\right]=\left[\qquad\right]$　……答

解法の Points

←X，Y が独立であるとき，
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
$(\because\ E(XY)=E(X)E(Y))$

← $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

←割り切れるもの，余りが1となるもの，余りが2となるもの，余りが3となるものを，小さい順にていねいに並べる。

← $V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

例題2 5人の生徒 a, b, c, d, e について，2回の統計のテストが下表のような結果になった。

	a	b	c	d	e	計
1回目	50	70	40	40	60	260
2回目	70	80	50	60	80	340

このとき，1回目と2回目の相関係数を求めよ。

●解答への Approach

1回目の変量を x とし，2回目の変量を y とする。x, y の平均をそれぞれ $\overline{x}$, $\overline{y}$ とすると

$$\overline{x}=[\quad\quad],\ \overline{y}=[\quad\quad]$$

また，x, y の分散 $s_x{}^2$, $s_y{}^2$ は次のようになる。

$$s_x{}^2=[\quad\quad],\ s_y{}^2=[\quad\quad]$$

偏差 $x_i-\overline{x}$, $y_i-\overline{y}$ の積の和の平均が共分散 c_{xy} であるから，一般には

$$c_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

$$=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\overline{x}\left[\quad\quad\right]-\overline{y}\left[\quad\quad\right]+[\quad\quad]\,\overline{x}\,\overline{y}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-[\quad\quad]$$

この場合，ていねいに計算をして

$$c_{xy}=[\quad\quad]-[\quad\times\quad]=[\quad\quad]$$

相関係数 r はこの共分散を x, y の標準偏差 s_x, s_y の積で割ったものであるから

$$r=\frac{c_{xy}}{s_xs_y}\fallingdotseq[\quad\quad]\qquad\cdots\cdots\text{答}$$

r は1に近いほど正の相関が強く，-1 に近いほど負の相関が強い。よって，この相関が〔　　〕で十分に1に近いので，この5人は統計に関して同じような能力をもっているといえる。

解法の Points

← $s_x{}^2=V(X)=E((X-\overline{x})^2)$

← $\overline{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\overline{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$

← $|r|\leqq 1$ は80ページのトレーニング・コーナー4を参照。

← $r=0$ の近くでは相関がない。

例題3 ある原野には，A，B 2種の野ねずみが生息しているという。任意に300匹の野ねずみを捕らえたところ，A種が90匹いた。A種の野ねずみは，この原野全体で何%生息していると考えられるか。信頼度95%で推定せよ。 (旭川医大)

●解答への Approach

A種の野ねずみがいる割合を p とする。すなわち，1匹の野ねずみを捕らえたら，それがA種である確率が〔　　〕である。

$n=300$ 匹の野ねずみを捕らえる場合，この中にA種のねずみが X 匹いるとすると，これは n 回の〔　　〕試行で，X は〔　　〕に従い，

平均 $m=$〔　　〕，標準偏差 $\sigma=$〔　　〕 $(q=1-p)$

よって，$n=300$ であるから，X は正規分布に従うと考えて

$$|X-m|\leqq 2\times〔\quad〕$$

が95%の確率で成り立つ。すなわち，

$$|90-〔\quad〕|\leqq 2\times〔\quad〕 \quad\cdots\cdots①$$

が95%の確率で成り立つ。

ここで，標準偏差 $\sqrt{npq}$ $(q=1-p)$ について，p を $\dfrac{90}{300}$ で近似すると，$n=300$ であるから

$$\sigma=〔\quad〕$$

よって，

$$90-〔\quad〕\leqq 300p\leqq 90+〔\quad〕$$

$$\frac{3}{10}-\left[\quad\right]\leqq p\leqq\frac{3}{10}+\left[\quad\right]$$

したがって，求める割合は

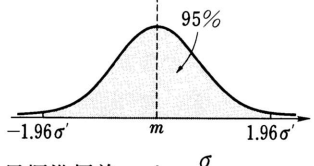
〔　　〕%から〔　　〕% ……答

解法の Points

←A種が x 匹である確率 $p(x)$ は
$p(x)={}_n\mathrm{C}_x\,p^xq^{n-x}$ $(q=1-p)$

←X が二項分布 $\mathrm{B}(n,\,p)$ に従うとき，すなわち，
$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^rq^{n-r}$
であると
$E(X)=np$，$V(X)=npq$

←一般に標準偏差が与えられていないときは，1組の標本での標準偏差をもって代用する。これが統計のむずかしいところ。



σ：母標準偏差，$\sigma'=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
1.96をしばしば2で代用する。

トレーニング・コーナー

（☞解答は「解説と解答」p. 101）

1 箱の中に1から4までの数字が1つずつ記入された球が入っている。この箱より同時に何個かの玉をとり出すことにする。任意にとり出された玉の数字の和をXとする。ただし何もとり出さない場合は，$X=0$ とする。このとき，Xの平均値と標準偏差を求めよ。（旭川医大）

2 -2，-1，0，1，2，3，4 の数を1つずつ記入した7枚のカードがある。この中より任意に2枚のカードをとり出し，カードに記入された数の和を値にもつ確率変数Xを考えるとき，Xの平均と分散を求めよ。（東京慈恵会医大）

3 $2, 3, \cdots, k+1$ のk個の値をとる確率変数Xの確率分布を

$P(X=n)=\dfrac{a}{n^3-n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) aの値を定めよ。　(2) Xの平均値を求めよ。（九大-理系）

4 相関係数 $r=\dfrac{C_{xy}}{S_xS_y}$ は -1 と $+1$ の間にある。すなわち，$-1\leqq r\leqq 1$

なお，複号同順で，$r=\pm 1$ となるのは $\dfrac{x_i-\overline{x}}{S_x}=\pm\dfrac{y_i-\overline{y}}{S_y}$ $(i=1, \cdots, n)$ のときに限ることを示せ。

5 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n) が，すべて直線 $y=ax+b$ の上にあるときは，$a>0$ のときは $r=1$ となり，$a<0$ のときは $r=-1$ となることを示せ。

6 1つのサイコロを180回振るとき，5の目が出る回数が20回以上かつ35回以下である確率を求めよ。

7 ある高校の1年生の男子100名を無作為抽出して身長を測定したところ，平均 170.5 cm，標準偏差 5.5 cm が得られた。このことから，この高校の1年生の男子の平均身長を信頼度95％で区間推定せよ。

8 15歳男子の身長は平均165 cm，標準偏差6 cm の正規分布に従うという。正規分布表（「公式活用III」p. 144）を用いて，次の問いに答えよ。

(1) 無作為に1人選んだとき，その身長が $163\leqq X\leqq 167$ となる確率はいくらか。

(2) 無作為に36人選んだとき，その36人の平均身長 $\overline{X}$ が $163\leqq\overline{X}\leqq 167$ となる確率はいくらか。

(3) 無作為にn人を選んだとき，そのn人の平均身長 $\overline{X}$ が $163\leqq\overline{X}\leqq 167$ となる確率が0.99より大きくなるためには，nはいくら以上にとればよいか。（琉球大-理系）

9 ある製品の不良品率はおよそ3％であるといわれている。5％を上回ることはないことを信頼度95％で確かめたい。何個以上を抽出すればよいか。また，99％ではどうか。

Hints

1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 i，$j=-2, \cdots, 4$

$i+j=3$ となる (i, j) は

$(-1, 4)$，$(0, 3)$，$(1, 2)$

3 $\displaystyle E(X)=\sum_{n=2}^{k+1} nP(X=n)$

4 $V(X)=s_x{}^2$

$\displaystyle=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$

5 このとき，平均 $\overline{x}$，$\overline{y}$ に対して

$\overline{y}=a\overline{x}+b$

6 平均：np

標準偏差：$\sqrt{np(1-p)}$

7 95％のとき

$\overline{x}_0-\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}<m<\overline{x}_0+\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$

8 平均m，標準偏差σの正規分布では $\dfrac{X-m}{\sigma}=U$ とおく。さらに，標本の大きさがnのとき，標本標準偏差は $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ だから，

$\dfrac{(\overline{X}-m)\sqrt{n}}{\sigma}=\overline{U}$

とおく。