数学B

32 平面上のベクトル

☞ 解答は「考え方と解答」104 ページ

基本問題

576 (1) 3つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(0,\ -2)$, $\vec{c}=(-8,\ 6)$ があるとき，$4\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ の成分と，その大きさを求めよ。

(2) $\vec{a}+\vec{b}=(10,\ 6)$, $\vec{a}-2\vec{b}=(4,\ -3)$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ を求めよ。

577 3つのベクトルを $\vec{a}=(5,\ -7)$, $\vec{b}=(-2,\ 4)$, $\vec{c}=(4,\ -5)$ とするとき，

$$5\vec{c}+3(\vec{x}-\vec{a})=2\vec{b}+6\vec{x}$$

をみたすベクトル $\vec{x}$ の大きさを求めよ。

578 △ABC において，Q は AC を 3：4 に内分し，P は BQ を 7：2 に内分する点とする。任意の1点を O とするとき，

(1) α, β を有理数として，$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OC}$ の形に表せ。

(2) l, m, n を有理数として，$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$ の形に表せ。 (滋賀大－経済)

579 (1) $\overrightarrow{OA}=(2,\ 0)$, $\overrightarrow{OB}=(3,\ 4)$ とするとき，∠AOB の二等分線が辺 AB と交わる点を C とすれば，$\overrightarrow{OC}=\boxed{}$ である。 (東京医大)

(2) △OAB で，辺 AB を 1：3 に内分する点を P とする。線分 OP が ∠AOB を2等分しているとき，$|\overrightarrow{OB}|$ は $|\overrightarrow{OA}|$ の $\boxed{}$ 倍である。 (鹿児島大－理系)

(3) △OAB で，OA を 3：1 に外分する点を P，OB を 2：1 に内分する点を Q，PQ と AB の交点を R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。 (東京学芸大)

580 3定点 A, B, C と動点Pがあって，$\overrightarrow{AB}=(3,\ 1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,\ 2)$ であり，$\overrightarrow{AP}$ が実数 t を用いて $\overrightarrow{AP}=(2t,\ 3t)$ と表されるとき，

(1) $\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PC}$ が $\overrightarrow{AB}$ と平行であるときの t の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ の大きさが等しいときの t の値を求めよ。

581 △ABC の辺 BC 上に点M，線分 AM 上に点Pをとり，BM : MC＝2 : 1，AP : PM＝3 : 2 であるとする。

(1) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{CP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{CP}$ の間にはどんな関係が成り立つか。

（茨城大－理工）

582 △ABC の頂角Aの二等分線と辺 BC の交点をDとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ および $|\vec{b}|$，$|\vec{c}|$ を用いて表せ。

標準問題

583 2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -3)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ に対して，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。このとき，$|\vec{c}|$ は $t=\square$ のとき最小値 $\square$ をとる。

（福岡大－経済）

584 2点 A(1, 1)，B(−1, −3) がある。動点Pが関係式 $|\overrightarrow{AP}|-|\overrightarrow{BP}|=0$ をみたすとき，$|\overrightarrow{AP}|$ の最小値は $\square$ である。

（工学院大）

585 △ABC において，辺 BC を 5 : 4 に内分する点をQとし，線分 AQ を 3 : 1 に内分する点をPとする。$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}=\square\vec{b}+\square\vec{c}$ で，また $\square\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+\square\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ である。

（東京理大－経営）

586 円 $x^2+y^2=1$ 上に3点 P，Q，R が $\angle PQR=90°$ となるように位置している。定点Aの座標を $(1,\ \sqrt{3})$ とすると，$\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$ は $\square$ と成分表示される。次に Q の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおく。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ このとき，

$$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}|^2=a-b\sin(\theta+c)\quad (a,\ b,\ c \text{ は定数で，} b>0,\ 0°\leqq c<360°)$$

と表すと $b=\square$，$c=\square$ である。このことから $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}|$ の最大値は $\square$ である。

（福岡工大）

587 座標平面上で4点 O(0, 0), A(3, 0), P($\sqrt{5}p$, p), Q($\sqrt{5}q$, $-q$) を考える。ただし, $p>0$, $q>0$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AP}$ が直交するのは $p=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ア}}\square}}{{}^{\text{イ}}\square}$ のときである。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が直交するのは $p=\dfrac{{}^{\text{ウ}}\square}{{}^{\text{エ}}\square}q$ のときである。

このとき, 線分 PQ が点 A を通るならば $q=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{オ}}\square}}{{}^{\text{カ}}\square}$ であり, PA : AQ $={}^{\text{キ}}\square : {}^{\text{ク}}\square$ となる。

(センター試験)

588 △OAB において, 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C, 辺 OB の中点を D とし, 線分 AD と線分 BC の交点を E とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと $\square$ となる。また辺 AB と直線 OE の交点を F とするとき, $\dfrac{\text{AF}}{\text{BF}}$ の値は $\square$ である。

(福岡大－理)

589 四辺形 ABCD が AB // CD かつ CD $=\dfrac{1}{3}$AB であるとき, AB を 2 : 1, AD を $m:n$ に内分する点をそれぞれ E, F とし, DE と CF の交点を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおく。

(1) EG : GD $=s:1-s$ $(0<s<1)$ のとき, $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(2) CG : GF $=4:3$ となるような $m:n$ を求めよ。

(熊本工大)

590 ▱ABCD において, 辺 BC の中点を L, 線分 DL を 2 : 3 に内分する点を M, AM の延長と辺 CD の交点を N とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{AM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) AN : AM と DN : CD を求めよ。

(大阪市大－文系)

591 AB $=$ AC $=2$, ∠BAC $=30°$ である △ABC において, B から辺 AC へ垂線をおろし, 辺 AC との交点を H とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 CH の長さを求めよ。

(3) $\overrightarrow{HB}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{CB}$ をみたす x, y の値を求めよ。

(岡山理大)

Back! Help!

「セミナーノート」第32講座 125〜128 ページ

「数学 α の完全整理」244〜251 ページ

33 平面上のベクトルの内積

☞ 解答は「考え方と解答」106 ページ

基本問題

592 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積，および，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$　　(2) $\vec{a}=(-4,\ 6)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$

(3) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 2\sqrt{3})$　　(4) $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

593 (1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\boxed{}$ である。 (東海大－医)

(2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角の大きさは $\boxed{}°$ であり，$|\vec{a}-\vec{b}|=\boxed{}$ である。 (福岡大－工)

594 次のベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトル (日本大－歯)

(2) $\vec{a}=(1,\ 3)$ と $45°$ の角をなす単位ベクトル

595 △OAB において，OA=1, OB=2, ∠AOB=120° とする。辺 AB の3等分点を A の方から M, N とするとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ の内積を求めよ。

596 ▱ABCD において，1点 O に対して $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ ならば，この平行四辺形は長方形であることを示せ。

597 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -2)$ のとき，$\vec{u}=t\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-t\vec{b}$ $(t>0)$ とおく，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が直交するとき，$t=\boxed{}$ である。また，内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ の最小値は $\boxed{}$ である。 (東海大－工・理)

598 放物線 $y=x^2$ 上の3点 $\mathrm{A}(t-1,\ (t-1)^2)$，$\mathrm{B}(t,\ t^2)$，$\mathrm{C}(t+1,\ (t+1)^2)$ について，∠ABC が 135° となるように t を定めよ。 (日本女大－家政)

599 (1) $\vec{a}=(3,\ 5)$，$\vec{b}=(4,\ -3)$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ が最小となる実数 t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1)において，$\vec{a}+t_0\vec{b}$ と $\vec{b}$ は直交することを示せ。（広島大－文系）

600 原点をOとし，2つのベクトルを $\overrightarrow{OA}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{OB}=(-4xy^2+2y,\ -2x-y^3)$ とする。Aが原点を中心とする半径1の円周上を動くとき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の最大値と最小値を求めよ。（静岡県大）

601 2点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ がある。動点Pが $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=1$ をみたすとき，原点とPの距離の最小値は $\boxed{}$ である。（工学院大）

602 $\vec{a}$ を単位ベクトルとし，$\vec{x}$ が $\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$ をみたすとき，$|\vec{x}+\vec{a}||\vec{x}-2\vec{a}|$ の最大値は $\boxed{}$ で，このときの $\vec{x}$ と $\vec{a}$ のなす角は $\boxed{}°$ である。（名城大－理工）

標準問題

603 和が零ベクトルとなる3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ がある。$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$ （ただし，Oは原点）とするとき，

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) △ABC の面積を求めよ。（福岡大－工）

604 線分 AD の中点をBとし，線分 AB を $2:1$ に内分する点をCとする。直線 AD の外に AP : PB$=2:1$ となるような点Pをとり，$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BP}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{CP}$ および $\overrightarrow{DP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DP}$ を求めよ。（成蹊大－経済）

605 △ABC において，CA$=\sqrt{5}$，CB$=2\sqrt{3}$ であり，また，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4$ である。AからCBにおろした垂線の足をHとする。

(1) △ABC の面積は $\boxed{}$ である。

(2) CH : HB$=1:\boxed{}$ である。

(3) $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB})$ と表すとき，$a=\boxed{}$ である。

(4) AB を $1:2$ に内分する点をP，CP と AH の交点をQとし，$\overrightarrow{CQ}=\dfrac{1}{5}(c\overrightarrow{CA}+d\overrightarrow{CB})$ と表すとき，$c=\boxed{}$ である。（千葉工大）

606　2点 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -3)$ と円 $C : x^2+y^2=1$ 上の動点Pがある。このとき，内積 $z=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のとりうる値の範囲は $\square \leqq z \leqq \square$ であり，z が最大になるときの P の座標は $(\square,\ \square)$ である。

（東京薬大）

607　3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ があり，点Pは内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ をみたしながら動いている。

(1)　Pの軌跡を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ の最大値と最小値を求めよ。

（北大－理系）

608　曲線 $4y=x^2$ と直線 $y=mx+n$ $(n>0)$ の交点を P，Q とする。x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を k とおく。

(1)　k を $a,\ m,\ n$ の式で表せ。

(2)　$m=1$ のとき，k を最小とするような $a,\ n$ の値を求めよ。

（埼玉大－教育・経済）

609　$\triangle\mathrm{ABO}$ において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{OA}=6$，$\mathrm{OB}=8$，内心を I とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値の7分の1は $\square$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\square(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ である。

（東京理大－理）

610　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。この三角形の重心を G とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $a,\ b,\ c$ で表せ。

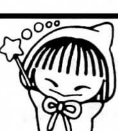
611　▱ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とし，辺BC を $(1-p):p$ に内分する点を P，対角線 BD を $(1-q):q$ に内分する点をQとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ p,\ q$ を用いて表せ。

(2)　3点 A，P，Q が1直線上にあるとき，$p,\ q$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　さらに，$\mathrm{AQ}\perp\mathrm{BD}$ であるとき，$p,\ q$ の値を求めよ。ただし，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。

（滋賀大）



Back! 「セミナーノート」第33講座 129～132 ページ
Help! 「数学 α の完全整理」252～263 ページ