28 微分法，接線・法線

☞ 解答は「考え方と解答」88 ページ

基本問題

494 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to -1}(2x-1)^2(x^2+x-1)$　(2) $\lim_{x \to 2}\dfrac{x-6}{x^2-2x-3}$

(3) $\lim_{x \to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$　(4) $\lim_{x \to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$

(5) $\lim_{x \to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3}\right)$　(6) $\lim_{x \to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

495 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\lim_{x \to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=3$　(2) $\lim_{x \to 2}\dfrac{ax^2+bx}{x-2}=1$

496 次の関数で，x が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=x^2-3x+6$　(2) $f(x)=4x^3-2x^2$

497 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の $x=1$ から $x=2$ までの平均変化率が 3，$x=2$ から $x=3$ までの平均変化率が 27 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

498 次の関数の〔　〕で示された x の値における微分係数を定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=3x^2+2$　〔$x=1$〕　(2) $f(x)=x^3-x$　〔$x=2$〕

499 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x(x+3)$　(2) $y=(x+1)(x-2)$

(3) $y=x^3-3x^2+4$　(4) $y=x(x+2)(x-3)$

500 次の関数を〔　〕内の文字を変数として微分せよ。

(1) $S=\pi r^2$　〔r〕　(2) $x=h(v^2+7vt-6t^2)$　〔t〕

501 次の曲線上の指定された点における接線の方程式，および法線の方程式を求めよ。

(1) $y=x^2+2x$　$(-1,\ 1)$

(2) $y=x^3-2x+1$　$(1,\ 0)$

502 曲線 $y=x^2-3x+6$ について，次のものを求めよ。

(1) 接線の傾きが7に等しい点の座標とその接線の方程式

(2) 接線が x 軸に平行な点の座標とその接線の方程式

(3) 接線の傾きが負である x 座標の範囲

503 曲線 $y=x^3+2x^2+x-2$ について，次のものを求めよ。

(1) x 軸に平行な接線の方程式とその接点の座標

(2) x 軸の正方向と $45°$ の角をなす接線の方程式とその接点の座標

(3) 接線の傾きが正である x 座標の範囲

504 次の接線の方程式を求めよ。

(1) 曲線 $y=-x^3+3x+2$ の接線のうちで，点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$ を通る接線

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ 15)$ から曲線 $y=x^3-3x^2+1$ へひいた接線

505 原点Oを出発して数直線を動く点Pの t 分後の位置 x(m) が $x=2t^3-9t^2+12t$ で与えられている。

(1) $t=1$ から $t=3$ までの間におけるPの平均速度を求めよ。

(2) 出発してから0.5分後におけるPの速度を求めよ。

(3) 出発してから何分後にPははじめて動く向きを変えるか。

(4) 加速度が数直線の正の方向に向いているような t の範囲を求めよ。

506 初速 24.5 m/秒 で真上に投げた物体の t 秒後の高さを h(m) とすると，$h=24.5t-4.9t^2$ であるという。

(1) この物体を投げてから1秒後の速度を求めよ。

(2) この物体が地上に落下するときの速度を求めよ。

(3) この物体が最高点に達するまでの時間を求めよ。

標準問題

507 次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x+a}{x-1}=b$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-ax+8}{x^2-(2+b)x+2b}=\frac{1}{5}$

508 (1) $f(x)$ は x の3次関数で，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=2$ をみたしている。このとき，$f(x)=\boxed{}$ である。 (京都産業大－理)

(2) 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数が3のとき，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+5h)-f(a-2h)}{h}=\boxed{}$ である。

(愛知工大)

509 (1) $f(x)$ は2次式で，$f(x)=0$ は重解をもち，$f(2)=1$，$f'(2)=2$ である。$f(x)$ を求めよ。

(近畿大－九州工)

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ は $f(-1)=1$，$(2x+1)f'(x)-4f(x)+3=0$ をみたすという。$f(x)$ を求めよ。

510 次の3条件をすべてみたすように関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ の係数 a, b, c を定めよ。

(i) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 1)$ を通る。

(ii) $x=1$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは2である。

(iii) 直線 $y=-2x+7$ は $y=f(x)$ に接する。 (神戸商船大)

511 (1) 放物線 $y=ax^2+2bx-1$ と $y=-x^2+4x-3$ が x 座標3の点で接線を共有するとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。 (広島工大)

(2) 2曲線 $y=x^2$ と $y=x^3+\boxed{}x^2+\boxed{}x$ は点 $(-1,\ 1)$ を共有点にもち，かつ，この点で接線 $y=\boxed{}x+\boxed{}$ を共有する。 (関西学院大－商)

512 点 $(2,\ 0)$ で直線 $y=-x+2$ に接する放物線 $y=ax^2+bx+c$ がある。

(1) b, c を a で表せ。

(2) この放物線上のある点における法線が直線 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ に一致するとき，この放物線を求めよ。

(山形大－理)

513 放物線 $y=x^2+k$ の２つの直交する接線の交点がつねに x 軸上にあるように k を定めよ。 （奈良女大）

514 曲線 $C: y=x^3-(1+t)x^2+(t-2)x+2t$ を考える。ただし，t は $-1<t<2$ をみたす定数とする。点 $(-1, 0)$ を通り C に接する直線の１つを l_1，点 $(2, 0)$ を通り C に接する直線の１つを l_2 で表す。$l_1 /\!/ l_2$ となるような t，l_1，l_2 を求めよ。 （東北大－文系）

515 点 $(0, 1)$ を通り曲線 $y=x^3-ax^2$ に接する直線がちょうど２本存在するとき，実数 a の値および２本の接線の方程式を求めよ。 （阪大－文系）

516 曲線 $y=x^2$ 上の２点を $\mathrm{P}(a, a^2)$，$\mathrm{Q}(b, b^2)$ とする。ただし，$a<b$，$a+b\neq 1$ とする。

(1) 原点O，点 $\mathrm{A}(1, 1)$ を通る直線と P，Q を通る直線の交点Gの座標を $s=a+b$，$t=ab$ を使って表せ。

(2) PとQが $\mathrm{PQ}=\sqrt{2}$ をみたしながら，PがOに限りなく近づくとき，交点Gの近づく点の座標を求めよ。 （岡山大）

517 放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=kx$ の２つの交点をP，Qとする。PとQで放物線に接線をひき，その交点をRとする。実数 k を変化させたとき，点Rの軌跡を求めよ。 （滋賀大－教育）

518 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の２点 $\mathrm{A}\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$，$\mathrm{B}\left(b, \frac{1}{2}b^2\right)$ での接線の交点をCとする。ただし，$a>0>b$

(1) $\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ のとき，b を a の式で表せ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるとき，Aの座標を求めよ。 （大阪市大－文系）

519 直線軌道上を走る電車がブレーキをかけてから t 秒間に進んだ距離 x m は $x=30t-0.5t^2$ であるとする。ブレーキをかけてから何秒後に何m進んで停止するか。また，ブレーキをかけて速度が半減するまでに何m進むか。 （青山学院大－経済）

Back!
Help!

「セミナーノート」第27講座 105～108 ページ
「数学 α の完全整理」214～220,227～232 ページ

29 極値，最大・最小

☞ 解答は「考え方と解答」92 ページ

基本問題

520 次の関数の増減，極値を調べて，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^3-6x^2+9x$　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-4$

(3) $y=x^3-3|x|+2$

521 (1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ が $x=-1$ と $x=2$ で極値をとるとき，$f(x)$ の極大値と極小値を求めよ。（日本女大－家政）

(2) 3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ について，極大値が2で，$f(-2)=2$，$f(2)=2$ であるとき，関数 $f(x)$ を求めよ。また，その関数のグラフをかけ。（大分大－教育・経済）

522 3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-2a-12)x$ が極大値と極小値をもつような a の範囲は $\boxed{}<a<\boxed{}$ である。このとき，極値をとる x の値を α，β とすると $\alpha\beta=1$ であった。すると，$a=\boxed{}$ であり，極大値は $\boxed{}$，極小値は $\boxed{}$ である。（大阪産業大－工）

523 $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+4$ は次の条件(i)～(iii)をみたす。A，B，C，D，E の値を求めよ。

(i) $f(x)$ は $x=0$，2 で極値をとる。

(ii) $f(-1)=0$

(iii) 2点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(3,\ f(3))$ を通る直線と $y=f(x)$ の交点で P，Q と異なる点の座標は $(D,\ E)$ である。（関西医大）

524 次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $f(x)=-x^3-3x^2+4$　$(-3\leqq x\leqq 2)$

(2) $f(x)=x-\frac{x^3}{6}$　$(-1\leqq x\leqq 2)$　（工学院大）

(3) $f(x)=3x^3-k^2x+2$　$(k>0)$　$(0\leqq x\leqq 1)$　（岩手大－農）

525 関数 $f(x)=2ax^3-3(3a+1)x^2+18x$（$a$ は正の定数）について，

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値が14となるような a の値を求めよ。（鹿児島大－理系）

526 (1) 曲線 $y=(x-3)^2$ $(0\leqq x\leqq 4)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から x 軸に垂線 PH をおろす。△POH の面積を最大にする P の座標と，△POH の面積を求めよ。ただし，O は原点である。 （熊本工大）

(2) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とし，曲線 $y=8-3x^2$ の $x>0$，$y>0$ の部分を C とする。C 上に動点 P をとり，P から y 軸におろした垂線の足を Q とするとき，四角形 OAPQ の面積 S の最大値を求めよ。

（東京薬大）

527 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $x^3+6x-5=0$ (2) $2x^3-3x^2-12x+1=0$

528 (1) $x>0$ のとき，不等式 $x^3+x\geqq 2x^2$ を証明せよ。

(2) $x>0$ のとき，不等式 $x^3-12x+k>0$ がつねに成り立つように，定数 k の範囲を定めよ。

標準問題

529 (1) a は定数とする。関数 $y=16x^3-20ax^2+8a^2x-a^3$ の極大値を求めよ。

(2) この関数が極大となる点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。a が変化するとき，P はどのような曲線上を動くか。 （徳島文理大－薬）

530 3次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a-1)x+1$ の極大値から極小値を引いた差を $g(a)$ と表す。

(1) $g(a)$ を a の式で表せ。

(2) $g(a)$ の最小値を求めよ。 （大阪市大－文系）

531 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の2条件をみたすとき，a，b，c の値を求めよ。

(i) $f(x)$ は極大値0をとる。

(ii) 導関数のグラフ $y=f'(x)$ は，直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ を軸とし，曲線 $y=f(x)$ 上に頂点をもつ放物線である。 （島根大）

532 1辺の長さが1である正方形 ABCD において，辺 BC 上に点 P を，辺 CD 上に点 Q を $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ であるようにとる。

(1) △APQ の面積 S を $x=\overline{\mathrm{BP}}$ で表せ。

(2) P が辺 BC 上を動くとき，S の最小値を求めよ。 （関西学院大－経済）

533 点 P$(x,\ y)$ が原点Oを中心とした半径1の単位円周上を動くとき，$z=x^3+y^3$ とする。

(1) OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ として，z を θ の関数として表せ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=t$ として，z を t の関数で表せ。

(3) z の最大値と最小値を求めよ。（日本歯大）

534 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x-\dfrac{3}{2}$ の交点を P，Q とする。線分 PQ の長さの最小値を求めよ。（一橋大）

535 $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき，$f(x)=-4\sin x\cos^2 x+9\cos^2 x-8\sin x-1$ の値の範囲を求めよ。さらに，$f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。（弘前大）

536 母線の長さが l，底面の半径が r である直円錐の体積を V，側面積を S とする。S を一定に保ちながら l，r を変化させるとき，V の最大値を S で表せ。（関西学院大－法）

537 p は定数で，$p>0$ とする。$f(x)=x^3-3p^2x+2p$ について，

(1) 関数 $f(x)$ は極値をもつことを示し，その極大値と極小値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ の相異なる実数解の個数を調べよ。（大分大－教育）

538 x についての3次方程式 $2x^3-3(a+b)x^2+6abx-2a^2b=0$ が3つの相異なる実数解をもつとする。このとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を求め，それを図示せよ。（東北大－理系）

539 (1) $x \geqq 0$ のとき，つねに $x^3-ax+1 \geqq 0$ が成り立つように実数 a の範囲を定めよ。（東北大－文系）

(2) $-1<x<2$ をみたすすべての x に対して，不等式 $4x^3-3x^2-6x-a+2>0$ が成立するような定数 a の範囲を求めよ。（釧路公立大）

Back! Help!

「セミナーノート」第28講座 109～112 ページ
「数学 α の完全整理」221～232 ページ