16 いろいろな数列

解答は「考え方と解答」47 ページ

基本問題

275 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(6k+2)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k-1)$

276 次の数列の一般項 a_n，および初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1\cdot3,\ 2\cdot5,\ 3\cdot7,\ 4\cdot9,\ \cdots$

(2) $1\cdot4,\ 3\cdot6,\ 5\cdot8,\ 7\cdot10,\ \cdots$

(3) $1\cdot2^2,\ 2\cdot3^2,\ 3\cdot4^2,\ 4\cdot5^2,\ \cdots$

(4) $2\frac{1}{3},\ 4\frac{1}{6},\ 6\frac{1}{12},\ 8\frac{1}{24},\ \cdots$

277 次の和を求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

(2) $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\cdots$　(第 n 項まで)

(3) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(4) $\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\cdots$　(第 n 項まで)

278 数列 $\frac{1}{1+\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ において，はじめの 3 項の和は $\boxed{}$ で，数列の和が 10 になるのは $n=\boxed{}$ のときである。

279 $P_1=(2,\ -1)$，$P_2=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$P_3=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$，$P_4=\left(\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\right)$，$\cdots$ とするとき，点 P_n を n の式で表せ。

(近畿大－九州工)

280 次の数列の一般項 a_n と初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31,\ \cdots$　　(2) $2,\ 3,\ 6,\ 15,\ 42,\ 123,\ \cdots$

281 8を分母とする正の既約分数すべてを小さい順に並べた数列を $a_1=\frac{1}{8}$, $a_2=\frac{3}{8}$, $a_3=\frac{5}{8}$, $\cdots$ とする。

(1) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(2) 自然数 m が与えられたとき，$a_n<m$ をみたすすべての a_n の和を m の式で表せ。(横浜国大－教育)

282 一般項が $a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{3a_n}$ の値を求めよ。 (福島県医大)

283 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{33}{200}$ のとき，n の値を求めよ。 (東京女子医大)

284 数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{2}{2^2}$, $\frac{3}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{2}{2^3}$, $\frac{3}{2^3}$, $\frac{4}{2^3}$, $\frac{5}{2^3}$, $\frac{6}{2^3}$, $\frac{7}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$, $\cdots$ で，$\frac{6}{2^5}$ は第何項か。

285 数列 1, 2+3, 4+5+6, 7+8+9+10, $\cdots$ について，

(1) 各項の最初の数の数列 1, 2, 4, 7, $\cdots$ を $\{b_n\}$ とすれば，その第 n 項は $b_n=\boxed{}$ である。

(2) もとの数列の第 n 項は $\boxed{}$ である。

標準問題

286 (1) $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\boxed{}$ である。また，$a_n<1.9$ をみたす最も大きい n は $\boxed{}$ である。

(慶大－経済)

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2}$ を求めよ。 (東北大－文系)

287 数列 $\frac{7}{1\cdot2\cdot3}$, $\frac{11}{2\cdot3\cdot4}$, $\frac{15}{3\cdot4\cdot5}$, $\cdots$ の第 n 項を a_n とする。

(1) $a_n=A\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+B\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ と表すとき，定数 A, B を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。 (広島大－文系)

288 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の第 n 項までの和が

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n^3+9n^2+26n}{3},\quad \sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n^2+5n}{2}$$

であるとき，$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}$ を求めよ。 (学習院大－経済)

289 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\boxed{}$ で，$U_n=T_1\cdot T_2\cdot\cdots\cdot T_n=\boxed{}$ である。

290 $S_n=1+2+3+\cdots+n$ とするとき，$S_1+S_2+\cdots+S_n$ を求めよ。

291 座標平面上に点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_3(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_4(0,\ 2)$，$\mathrm{P}_5(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_6(2,\ 0)$，$\mathrm{P}_7(3,\ 0)$，$\mathrm{P}_8(2,\ 1)$，$\mathrm{P}_9(1,\ 2)$，$\mathrm{P}_{10}(0,\ 3)$，$\mathrm{P}_{11}(0,\ 4)$，$\cdots$ で定める。$\mathrm{P}_n(34,\ 9)$ となる n を求めよ。 （大阪府大－文系）

292 正の偶数を次のように組み分ける。 $2|4,\ 6|8,\ 10,\ 12|14,\ 16,\ 18,\ 20|22,\ 24,\ \cdots$

(1) 第 n 群の初項を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。 （釧路公立大）

293 1から始まる奇数列を，次のように第 n 群が $2n$ 個の数を含むように区分する。

$$|1,\ 3|5,\ 7,\ 9,\ 11|13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23|25,\ \cdots$$

このとき，第 n 群の最初の数は $\boxed{}$ であり，第 n 群に属するすべての数の和は $\boxed{}$ である。

（南山大－経済）

294 $a_1=1$，$a_2=2+3$，$a_3=4+5+6+7$，$a_4=8+9+10+11+12+13+14+15$，$\cdots$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

(2) $S_n>10^6$ である最小の n を求めよ。 （山梨大－教育）

295 1の間にはさまれる2の個数が1つずつ増えるという規則でつくられる次の数列がある。

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ \cdots$$

(1) 初項から第1993項までの和を求めよ。

(2) 初項からの和が2001よりはじめて大きくなるのは第何項目か。 （鳴門教育大）

Back! 「セミナーノート」第16講座 61～64 ページ

Help! 「数学 α の完全整理」129～133 ページ

17 漸化式，数学的帰納法

解答は「考え方と解答」51 ページ

基本問題

296 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ のはじめの5項を書け。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n$

(4) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

297 $a_1=3,\ 2a_{n+1}=a_n+6\ (n\geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を次の方法で求めよ。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。次にその結果から a_n を推定せよ。

(2) 階差 $b_n=a_{n+1}-a_n$ を調べて，a_n を求めよ。

(3) $c_n=a_n-6$ とおいて定められる数列 $\{c_n\}$ を調べて，a_n を求めよ。

298 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n-2$

(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=-4a_n$

(3) $a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+n-3$

(4) $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2(n+1)$

299 数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n=-7+2n-a_n$ で表されるものとする。

(1) a_n と a_{n-1} の関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

300 数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の関係があるとき，

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて，b_n と b_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ において，第 n 項 b_n を求めよ。

(3) $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

301 次の式で定義された数列 $\{a_n\}$ において，$a_{n+1}-a_n$ を n の式で表せ。次に，このことを利用して一般項 a_n を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

(2) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}+a_{n+1}=2a_n$

302 数列 1，1+2+1，1+2+3+2+1，1+2+3+4+3+2+1，… がある。

(1) この数列を $\{a_n\}$ とするとき，推定によって a_n を n の式で表せ。

(2) (1)の推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ。

303 自然数についての次の等式を数学的帰納法によって証明せよ。

(1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

304 n を正の整数とするとき，$2^{n+1}+3^{2n-1}$ は 7 で割り切れることを証明せよ。 （名城大－理工）

標準問題

305 $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

(1) $b_n=a_n+\dfrac{1}{2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，$\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。 （岡山理大－理）

306 $a_1=\dfrac{5}{2},\ a_{n+1}=5-\dfrac{4}{a_n}\ (n\geqq1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_0=2,\ \dfrac{b_n}{b_{n-1}}=a_n\ (n\geqq1)$ によって定義するとき，$b_{n+1},\ b_n,\ b_{n-1}\ (n\geqq1)$ の間に成立する関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。 （関西学院大－経済）

307 $a_1=a,\ a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。ただし，a は $a>1$ をみたす定数とする。また，$b_1=a_1,\ b_2=a_1a_2,\ \cdots,\ b_n=a_1a_2\cdots a_n,\ \cdots$ とおく。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n>1$ であることを証明せよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを証明し，第 n 項 b_n を a と n で表せ。

(3) $a=3$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を n で表せ。 （徳島大－理系）

308 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ において，一般項 a_n および初項から第 m 項までの和 S_m を求めよ。

(1) $a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ （新潟大-教育）

(2) $a_1=\dfrac{1}{2},\ 2a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{2^{n-2}}\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$ （関西大-法）

309 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=0,\ a_n=3a_{n-1}+3^n\ (n\geqq 2)\ \cdots(*)$ をみたすとする。

(1) 一般項 a_n を表す式を求めよ。

(2) 式$(*)$の両辺を $n=2$ から $n=N$ まで加えた式をつくり，それを用いて $\sum_{n=1}^{N} a_n$ を求めよ。

（津田塾大-数学）

310 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_2=4,\ a_n=\dfrac{1+a_{n-1}}{a_{n-2}}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ で定義する。その第 n 項までの和を $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおくとき，

(1) $a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7$ と S_5 を求めよ。

(2) $b_n=S_{5n}$（n は正の整数）とおくとき，b_n を求めよ。

(3) $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ とおくとき，T_n を求めよ。

(4) $T_n\geqq 600$ となる最小の整数 n を求めよ。 （高知大-理）

311 次の数列について，$a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めて一般項 a_n を推定し，次にそれが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

312 n を自然数とするとき，次の不等式を数学的帰納法によって証明せよ。

(1) $2^{n+1}>n^2+n+1$

(2) $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\geqq\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}$

313 自然数 n に対して次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$ （弘前大）

Back!
Help!

「セミナーノート」第17講座 65〜68 ページ

「数学 α の完全整理」134〜140 ページ

18 二項定理

解答は「考え方と解答」55 ページ

基本問題

314 二項定理を用いて次の式を展開せよ。

(1) $(3a+2b)^2$ (2) $(6-x)^3$ (3) $(2x-3y)^4$

(4) $(2x+y)^5$ (5) $\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$

315 二項定理を用いて，次の値を計算せよ。

(1) 99^3 (2) 101^3 (3) 1.01^4

(4) 0.98^4

316 次の式の展開式で，〔　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1) $(x+2)^8$ 〔x^4〕 (2) $(2-x)^{17}$ 〔x^{10}〕

(3) $(2x-3)^7$ 〔x^5〕 (4) $(1-2x)^7$ 〔x^3〕

(5) $(x+y)^{10}$ 〔x^4y^6〕 (6) $(2x+3y)^6$ 〔x^2y^4〕

317 (1) $\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ の展開式における $\dfrac{1}{x^2}$ の係数を求めよ。

(2) $\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^6$ の展開式における x^6 の係数を求めよ。

(3) $\left(x^3-\dfrac{3}{x}\right)^6$ の展開式における x^2 の係数を求めよ。

318 次の式の展開式における x を含まない項を求めよ。

(1) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ (2) $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$

319 $\left(3x^2-\dfrac{5}{x}\right)^9$ の展開式で，定数項は $\boxed{}$，x^6 の係数は $\boxed{}$ である。

320 次の展開式における x^4 の係数を求めよ。

$$(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$$

標準問題

321 $\left(ax^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$ の展開式において，x^4 の係数が 80 であれば，a の値は $a=\boxed{}$ である。また，この展開式の x^7，$\dfrac{1}{x^2}$ の係数 b，c はそれぞれ $b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である。

322 $(1+x)^n$ を展開して昇べきの順に項を並べたとき，その項数は奇数であって，はじめから第5，6，7番目の各項の係数が等差数列をなしているという。n の値を求めよ。

323 $(x+y)^n$ の展開式における第3，4，5番目の項の係数がそれぞれ 168，-70，$\dfrac{35}{2}$ であるとき，x，y，n の値を求めよ。

324 $(1+x)^n=1+a_1x+\cdots+a_mx^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+x^n$ において，$a_mx^m=a_{m+1}x^{m+1}$ となる x の値を求めよ。ただし，$x\neq 0$ で，n は自然数である。（明治大－工）

325 n を3以上の自然数とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=3}^{n} {}_k\mathrm{C}_3 = {}_{n+1}\mathrm{C}_4$$

（宮崎大－教育）

326 次の式の展開式で，〔　　〕内に示した項の係数を求めよ。

(1) $(a+b-2c)^7$ 〔$a^3b^2c^2$〕（昭和薬大）

(2) $(x+2y+3z)^5$ 〔x^2y^2z〕

(3) $\left(x^2+1-\dfrac{1}{x}\right)^5$ $\left[x^4,\ \dfrac{1}{x^2}\right]$（東京慈恵会医大）

327 式 $\left(a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^7$ を展開したときの ab^2 の係数を求めよ。（関西学院大－理）

Back! 「セミナーノート」第17講座 65～68 ページ
Help! 「数学 α の完全整理」141～143 ページ