30 積 分 法

解答は「考え方と解答」97 ページ

基本問題

540 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-x^2+3x-2)\,dx$　　(2) $\int(x+a)^2\,dx-\int(x-a)^2\,dx$

(3) $\int x(3-x)\,dx$　　(4) $\int(y-2)(1-y)\,dy$

541 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+3)\,dx$　　(2) $\int_{2}^{3}(3-x)(2-x)\,dx$

(3) $\int_{0}^{3}|x-2|\,dx$　　(4) $\int_{-1}^{2}(x^2+|x|+1)\,dx$

(5) $\int_{-1}^{1}|x^2-4x|\,dx$

542 次の条件をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f'(x)=2x-3$, $f(0)=2$　　(2) $f'(x)=(x+1)(x-2)$, $f(0)=1$

543 次の等式が成り立つように，定数 p の値を定めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}x(x+2p)\,dx=6$　　(2) $\int_{-1}^{1}(x+p^2-p)\,dx=0$

(3) $\int_{-1}^{1}(x+1)(p-x)\,dx=\dfrac{1}{3}$

544 関数 $f(x)=px^2+qx+r$ が $f(0)=1$, $f'(1)=4$, $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=1$ をみたすとき，定数 p, q, r の値を求めよ。

545 $a\fallingdotseq 0$ のとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int(ax+b)^2\,dx=\frac{1}{3a}(ax+b)^3+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

546 (1) a, α, β $(\alpha<\beta)$ を実数とするとき，$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3$ を証明せよ。

(2) 2次方程式 $-x^2+2x+2=0$ の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+2x+2)\,dx$ を求めよ。

(九州産業大－工)

547 曲数 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $2x-3$ であって，$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\frac{9}{2}$ をみたすような $f(x)$ を求めよ。

548 (1) $\int_0^1 (ax+b)\,dx=1$, $\int_1^2 (ax+b)\,dx=3$ が同時に成り立つとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。

(2) $f(-2)=0$, $f(0)=3$, $f(2)=0$ をみたす3次関数 $f(x)$ に対して $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\boxed{}$ となる。

549 次の計算をせよ。

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^x (t^2-3t+4)\,dt$ (2) $\frac{d}{dx}\int_3^x (t-3)(2t+1)\,dt$

標準問題

550 1次関数 $f(x)=ax+b$ について，$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$ と $\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2$ の大小関係を調べよ。

551 関数 $f(x)=ax+b$ が $\int_0^1 f(x)\,dx=1$ をみたしているとき，定積分 $\int_0^1 [\{f(x)\}^2-ax]\,dx$ の値を最小にする a, b を求めよ。

(日本女大)

552 $f(x)=\int_2^x (t-1)(t-3)\,dt$ に対し，

(1) $f(x)=0$ をみたす x のうち，最小の値は $\boxed{}$ である。

(2) $f(x)$ は $x=\boxed{}$ で極小値 $\boxed{}$ をとる。

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\boxed{}$ である。

(共立薬大)

553 $\lim_{a\to 1}\frac{1}{a-1}\int_1^a (2x^2-x+3)\,dx=\boxed{}$ である。

(北海道工大)

554 $F(a)=\int_0^1|x^2-(2a+2)x+a(a+2)|\,dx\ (-1\leqq a\leqq 1)$ とする。

(1) $F(a)$ を求めよ。

(2) $F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。 (大同工大)

555 a を定数として，$F(x)=\int_x^{x+1}t(t+a)\,dt$ とおく。

(1) $F(x)$ の最小値を求めよ。

(2) (1)の最小値は a に関係する。この最小値はどんな a に対して最も大きくなるか。 (学習院大－経済)

556 (1) $f(0)=3,\ f'(x)=-3x+2\int_0^2 f(x)\,dx$ をみたす関数 $f(x)$ は，$x=\boxed{}$ のとき，最大値 $\boxed{}$ をとる。 (中京大)

(2) 関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=x^2+\int_0^1 xf(t)\,dt+\int_0^2 f(t)\,dt$ をみたすとき，
$f(x)=x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ である。 (名城大－理工)

557 (1) 任意の実数 x に対して，$\int_1^x f(t)\,dt=x^3-(2a+b)x+2ab-1$ が成立するように，正の整数 a，b を定めよ。 (青山学院大－国際)

(2) $f(x)=\int_{-2}^x (t^2+t-2)\,dt$ ならば，関数 $f(x)$ は $x=\boxed{}$ のとき極大となり，極大値は $\boxed{}$ である。また，$x=\boxed{}$ のとき極小となり，極小値は $\boxed{}$ である。 (明治学院大－経済)

558 数直線上の2つの動点 P_1，P_2 は時刻0のときに原点を出発し，時刻 t でのそれぞれの速度 $v_1(t)$，$v_2(t)$ が次式で与えられる。ただし，$t\geqq 0$，$0<a<2$ とする。

$$v_1(t)=2t^2-4at+a^2,\quad v_2(t)=-t^2+8at-8a^2$$

(1) P_1 と P_2 が原点を出発した後，ふたたび出会うときの時刻を求めよ。

(2) $0\leqq t\leqq 6$ における2点 P_1，P_2 間の距離の最大値と，そのときの t の値を求めよ。 (成城大－経済)

Back!
Help!

「セミナーノート」第29講座 113～116 ページ
「数学 α の完全整理」233～238 ページ

31 面　積

解答は「考え方と解答」100 ページ

基本問題

559 次の曲線や直線によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-3x+5$，直線 $y=2x-1$

(2) 2つの放物線 $y=-x^2+6x-4$，$y=x^2-4x+4$ （会津大）

(3) 2つの放物線 $y=-x^2+4ax-2(a^2+a-2)$，$y=x^2-2x$ （琉球大）

(4) 放物線 $y=-\frac{1}{9}x^2+2$，折れ線 $y=|x-2|$ （城西大－理）

560 2つの放物線 $y=x^2$ と $y^2=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 （自治医大）

561 放物線 $y=x^2+3$ の接線で原点を通る直線を l，m とする。

(1) 接線 l，m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2+3$ と接線 l，m で囲まれた部分の面積を求めよ。 （大分大－教育）

562 2つの曲線 m：$y=x^2$，n：$y=x^2-4x+8$ がある。

(1) m，n に共通な接線 l の方程式を求めよ。

(2) l と m，n で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 （明星大－理工）

563 放物線 $y=x^2+a$（a は正の定数）上の $x=p$ の点での接線を T，放物線 $y=x^2$ を C とする。

(1) T の方程式を求めよ。

(2) T と C の共有点の座標を求めよ。

(3) T と C で囲まれた部分の面積は，p のとり方に関係しないことを示せ。 （岡山理大）

564 $y \leqq -x^2+4|x|+12$，$y \geqq 0$ が表す領域 D の面積を S とする。D において2直線 $x=a$ と $x=-a$ の間にある部分の面積が $\frac{5}{8}S$ となる a の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。 （関西大－経済）

565 2つの放物線 $y=3x^2-4x+5$ ……①, $y=2x^2+ax+b$ ……② と，点 (1, 4) において放物線①に接する直線 l がある。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l が点 (1, 4) において放物線②に接するように a, b を定めよ。

(3) 放物線①と l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とし，放物線②と l および y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の比を求めよ。 (東北大－文系)

566 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ の実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とする。放物線 $y=x^2-ax+b$ と x 軸で囲まれる部分の面積を S とするとき，

(1) S を α, β の式で表せ。

(2) $S=\dfrac{4}{3}$ であるとき，a と b の関係式を求めよ。次に，この a と b の関係を平面上に図示せよ。

(早大－人間科学)

標準問題

567 次の不等式を同時にみたす領域の面積 S を求めよ。

(1) $y\geqq x^2$, $y\leqq 3x+4$, $y\leqq -3x+10$ (愛知医大)

(2) $x^2+y^2-2ay\leqq 0$, $2x^2\leqq ay$ $(a>0)$ (滋賀大－教育)

568 曲線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点A (Aの x 座標は正とする) における接線を l とし，l と x 軸の交点を P$(t,\ 0)$ とする。

(1) 原点とPとの距離が，Aから x 軸までの距離に等しいとき，t の値とAの座標を求めよ。

(2) このとき，曲線 $y=\dfrac{x^2}{4}$, l および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 (新潟大－農・経済)

569 放物線 $C: y=x^2+a$ $\left(a>\dfrac{1}{4}\right)$ 上の点 P$(t,\ t^2+a)$ から直線 $l: y=x$ におろした垂線の足をQとする。

(1) 線分 PQ の長さを最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) $t=t_0$ のとき，C, l, PQ と y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。 (東京商船大)

570 点 (0, 1) を通る傾き m の直線と曲線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積 S を m で表せ。さらに，m が変わるとき，S の最小値を求めよ。 (城西大－薬)

571　平面上の点 $(x,\ y)$ について，$x=\sin\theta\cos\theta$，$y=\cos\theta-\sin\theta$ $(45°\leqq\theta\leqq 90°)$ の関係がある。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　点 $(x,\ y)$ の集合を図示し，次にこれと x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

（早大－社会科学）

572　t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，$x\geqq 0$ の範囲で，放物線 $y=x^2-t^2$ と x 軸，および直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

(2)　$S(t)$ を最小にする t の値と，$S(t)$ の最小値を求めよ。　（鹿児島大－教育）

573　直線 $y=x-1$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-1)$ から放物線 $y=x^2$ にひいた２本の接線の接点を A，B とするとき，

(1)　線分 AB の中点の座標を t で表せ。

(2)　放物線と２本の接線で囲まれる部分の面積を t で表せ。

(3)　点Pが直線 $y=x-1$ 上を動くとき，(2)で求めた面積を最小にする t の値を求めよ。

（九州産業大－工）

574　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2)$ における接線に平行で，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通る直線が放物線と交わる点を B，C とする。A が放物線上を動くとき，

(1)　$\triangle$ABC の面積を S_1 とするとき，S_1 の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

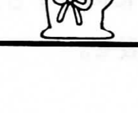
(2)　直線 BC と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，S_1 と S_2 の比を求めよ。

（西南学院大）

575　２次関数 $f(x)$ がすべての実数 x に対して $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=(x-1)\{x^2+(1-a)x-a\}$ をみたしている。ただし，a は定数とする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を a を用いて表し，面積が最小になるときの a の値を求めよ。　（弘前大）



Back!
Help!

「セミナーノート」第30,31講座 117～124 ページ
「数学 α の完全整理」239～242 ページ