34 空間のベクトル

☞ 解答は「考え方と解答」110 ページ

基本問題

612　四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。辺 BC を 2 : 1 に内分する点を D，線分 AD を 1 : 3 に内分する点を E とする。このとき，$\overrightarrow{OE}$ を $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ の形に表せ。

613　$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{c}=(1,\ 1,\ 1)$ とするとき，$\vec{u}=(7,\ -3,\ 2)$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の1次式として表せ。

614　(1)　3 点 A(1, 3, −2)，B(2, $\boxed{}$, 1)，C($\boxed{}$, 1, 4) は 1 直線上にある。　(関西学院大－商)

(2)　3 つのベクトル $(x,\ 1,\ -7)$，$(2,\ y,\ 3)$，$(1,\ -1,\ z)$ が互いに垂直であるとき，x，y，z の値を求めよ。

(3)　3 点 A(0, 1, 1)，B(−1, −1, 2)，C(2, 3, 1) を頂点とする △ABC の面積を求めよ。

615　次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 3,\ 1)$，$\vec{b}=(5,\ 1,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 2,\ -4)$

616　3 点 A$(a,\ b,\ c)$，B$(b,\ c,\ a)$，C$(c,\ a,\ b)$ を頂点とする三角形について，

(1)　△ABC は正三角形であることを示せ。

(2)　△ABC の重心を G とすると，OG⊥AG であることを示せ。

617　(1)　4 点 A(1, −1, 2)，B(3, 0, −1)，C(6, 1, −2)，D(4, 0, 1) を頂点とする四角形 ABCD の面積は $\boxed{}$ である。　(中部大)

(2)　4 点 A(0, 1, 1)，B(2, 2, 2)，C(1, 3, 2)，D$(1,\ y,\ z)$ を考える。そのとき △ABC の面積は $\boxed{}$ であり，$\overrightarrow{AD}$ が 3 点 A，B，C を通る平面に垂直であるならば，$y=\boxed{}$，$z=\boxed{}$ である。　(慶大－総合政策)

618 (1) $\vec{a}=(1,\ 2,\ -3)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 1)$，$\vec{c}=(2,\ 1,\ 3)$ のとき，$\vec{a}+\vec{c}$ と $\vec{b}+\vec{c}$ に直交する単位ベクトルを求めよ。

(2) $\vec{a}=(2,\ x,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき長さが最小になるものとする。そのときの $\vec{a}+t\vec{b}$ の長さを求めよ。 （東京女子医大）

619 1辺の長さが1の正四面体 OABC において，2辺 AB，OC の中点をそれぞれ M，N とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，

(1) $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{BN}$ の内積を求めよ。

(3) $\angle BNM=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。 （東京水産大）

620 次の直線の方程式を求めよ。

(1) A$(2,\ -3,\ 1)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 4,\ -2)$ に平行な直線

(2) 2点 $(3,\ 2,\ -1)$，$(5,\ 4,\ 6)$ を結ぶ直線

621 (1) 2直線 $x-1=\dfrac{2-y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$，$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z+5}{-3}$ の交点の座標を求めよ。

(2) 2直線 $x-3=-y-1=2(z-2)$，$2x=y=-2z+8$ はねじれの位置にあることを示せ。

622 次の平面の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,\ -1,\ 3)$ を通り，法線ベクトルが $\vec{v}=(1,\ 3,\ 2)$ である平面

(2) 点 $(1,\ -2,\ -3)$ を通り，直線 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$ に垂直な平面

(3) 3点 A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ -5)$ を通る平面

(4) 3点 A$(-1,\ 1,\ 3)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(2,\ 0,\ -2)$ を通る平面

623 次の球の方程式を求めよ。

(1) 点 $(2,\ -2,\ 0)$ を中心とし，点 $(3,\ 3,\ -2)$ を通る球

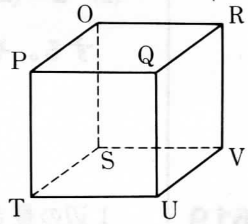
(2) 点 $(1,\ 1,\ 1)$ を中心とし，xy 平面との交線が半径2の円となる球

(3) 点 $(2,\ 4,\ -3)$ を中心とし，平面 $2x+y-2z-2=0$ に接する球

624 直線 $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-2}{4}$ と球 $x^2+y^2+z^2=49$ の交点の座標を求めよ。

標準問題

625 図のような立方体の対角線 RT の中点をGとし，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OR}=\vec{r}$，$\overrightarrow{OS}=\vec{s}$ とする。



(1) $\overrightarrow{GU}$ を $\vec{p}$，$\vec{r}$ および $\vec{s}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{GU}$ は平面 QTV に垂直であることを証明せよ。

（広島大－文系）

626 3つのベクトル $\vec{a}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)$，$\vec{b}=(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ -1)$，$\vec{c}=(x,\ y,\ \sqrt{2})$ が次の２条件をみたすとき，$\vec{c}$ の大きさを求めよ。

(i) $\vec{a}$ は $\vec{c}$ に垂直である。 (ii) $\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角は 60° である。

（信州大－理）

627 原点をOとする空間内に３点 P，Q，R がある。$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ が２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて次の式で与えられている。

$$\overrightarrow{OP}=5\vec{a}-4\vec{b},\ \overrightarrow{OQ}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OR}=3\vec{a}-\vec{b}$$

△PQR が１辺の長さ８の正三角形であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさ，および $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ。

（大阪府大－工）

628 四面体 OABC において，AC の中点を P，PB の中点をQとし，CQ の延長と AB の交点をRとする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) AR：RB の比，および CQ：QR の比を求めよ。

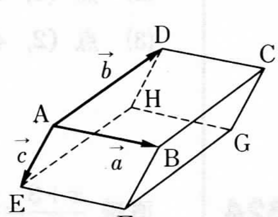
(3) 四面体 OBQR と四面体 OCPQ の体積の比を求めよ。

（大分大－教育）

629 空間において，平面α上にある △ABC とα上にない点Pがあり，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$ であるとする。Pからαにひいた垂線を PQ とするとき，Q は △ABC の垂心であることを証明せよ。

（姫路工大）

630 平行六面体 ABCD－EFGH がある。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AD}$，$\vec{c}=\overrightarrow{AE}$ とするとき，

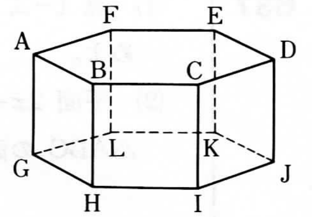


(1) 線分 AG と線分 BH は互いに他を２等分することを示せ。

(2) $\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{CE}$ と $\overrightarrow{DF}$ がそれぞれ直交するための必要十分条件を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（広島大－学校教育）

631 右の図のように正六角柱を考える。すべての辺の長さは1とする。点Aを通り線分 HE に直交する直線と HE との交点をPとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{c}$ とする。



(1) $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 （宮城教育大）

632 四面体 ABCD において，AC=BD, AD=BC が成り立つとき，

(1) $\angle ABC=\angle BAD$, $\angle ADC=\angle BCD$ を示せ。

(2) 辺 AB, CD の中点をそれぞれ M, N とするとき，$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB})$ を示せ。

(3) $MN\perp AB$, $MN\perp CD$ を示せ。 （新潟大）

633 (1) 空間において，2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積を S とすると，$S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ であることを示せ。

(2) n を整数とし，2つのベクトル $\vec{a}=(n,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=(0,\ n+1,\ 1)$ を2辺とする平行四辺形の面積を S_n とする。S_n を n の式で表せ。

(3) S_n は整数であることを証明せよ。 （明治大－商）

634 4点 O(0, 0, 0), A(0, 0, 2), B(2, 0, 0), C(1, $\sqrt{3}$, 0) がある。点Pが線分 AB 上を動くとき，△OPC の面積の最大値と最小値を求めよ。 （一橋大）

635 空間で，x 軸上に2点 A(2, 0, 0), P($2t$, 0, 0), y 軸上に2点 B(0, 2, 0), Q(0, $2t$, 0), z 軸上に2点 C(0, 0, 1), R(0, 0, t) をとる。ただし，$t>0$ とする。Oを原点とし，OA, OB, OC を3辺とする直方体を V とするとき，

(1) △PQR の面積を t を用いて表せ。

(2) $1\leqq t\leqq 2$ のとき，△PQR と直方体 V が交わってできる図形の面積 $S(t)$ の最大値を求めよ。 （福岡大－工・薬）

636 各辺の長さが1の正四面体を PABC とし，Aから平面 PBC へおろした垂線の足をHとする。$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とおく。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PH}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 正四面体 PABC の体積を求めよ。 （佐賀大－教育・農）

637 (1) 点 $(-2,\ 3,\ -1)$ から平面 $x-2y+z-6=0$ へおろした垂線がこの平面と交わる点の座標を求めよ。 (大阪工大)

(2) 平面 $2x+3y+4z=12$ と x 軸，y 軸，z 軸との交点をそれぞれ A，B，C とする。このとき，△ABC の面積を求めよ。 (宇都宮大)

638 3点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 3)$，$\mathrm{C}(4,\ 2,\ 0)$ に対し，線分 BC を $2:1$ に内分する点をDとする。Dの座標は $\boxed{}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に垂直でAを通る平面 α の方程式は $\boxed{}$ である。また，2点B，Cを通る直線と平面 α の交点の座標は $\boxed{}$ である。 (北見工大)

639 3点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 6)$ を含む平面を P とする。

(1) P の方程式を求めよ。

(2) 原点Oから P へ垂線をおろしたときの足をHとする。OH の長さを求めよ。

(3) △ABC の面積を求めよ。

(4) 四面体 OABC に内接する球の半径を求めよ。 (山形大－理)

640 平面 α：$2x-3y+z=6$，直線 g：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ および点 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ 1)$ がある。

(1) α と g の交点Bの座標を求めよ。

(2) AとBを直径の両端とする球の方程式を求めよ。

(3) 原点をOとするとき，△OAB の面積を求めよ。 (帯広畜産大)

641 2平面 α：$x-2y+2z=5$，β：$3x+4y-5z=-3$ がある。

(1) α と β のなす角を求めよ。

(2) 原点を通り，α と β の交線に平行な直線の方程式を求めよ。

(3) 点 $(4,\ 15,\ -5)$ を通り，α および β に垂直な平面の方程式を求めよ。 (足利工大)

642 平行な2直線 $x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$，$x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ について，2直線の間の距離と，これらを含む平面の方程式を求めよ。 (東邦大－理)

Back!
Help!

「セミナーノート」第34講座 133〜136 ページ
「数学 α の完全整理」264〜275 ページ