13 式の証明，命題，条件

☞ 解答は「考え方と解答」38 ページ

基本問題

221 次の等式を証明せよ。

(1) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

(2) $2(a^4+b^4)=(a+b)^2(a-b)^2+(a^2+b^2)^2$

(3) $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{a-b+c}=\dfrac{p+q+r}{p-q+r}$

(4) $a+b=2$ のとき，$a(a+1)+b(b+1)=2(3-ab)$

(5) $a+b+c=0$ のとき，$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

222 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a>1$，$b>1$ のとき，$ab+1>a+b$

(2) $a>b>0$ のとき，$\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$

(3) $a^2+2a+2>0$

(4) $4x^2+12x+9\geqq 0$

(5) $a^2+b^2+2\geqq 2(a+b)$

(6) $a>0$，$b>0$ のとき $a+\dfrac{4}{a}\geqq 4$

(7) $a>0$，$b>0$ のとき $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4$

223 次の命題の真偽を調べよ。また，偽のときは反例をあげよ。

(1) 素数は奇数である。

(2) 81 の平方根は 9 である。

(2) $x<4$ ならば，$x^2<16$

(4) $a<1$ ならば，$a^2<a$

(5) $x>1$ ならば，$(x-1)(x-3)<0$

(6) $x^2-3x+2<0$ ならば，$0<x<3$

224 次の条件の否定をつくれ。

(1) $x=2$ または $x=3$

(2) $x<5$ または $7<x$

(3) $3<x<6$

(4) a も b も正の数である。

225 次の命題の逆・裏・対偶をつくり，その真偽を調べよ。ただし，文字は実数とする。

(1) 整数 x が 6 で割り切れれば，x は 3 で割り切れる。

(2) $a^2+b^2=0$ ならば，$a=0$ かつ $b=0$ である。

(3) $ab\fallingdotseq 6$ ならば，$a\fallingdotseq 2$ または $b\fallingdotseq 3$ である。

(4) $a<1$ かつ $b<1$ ならば，$a+b<2$ である。

226 次の $\square$ に，必要，十分，必要十分のうちの適するものを入れよ。

(1) 三角形の 2 角が等しいことは，その三角形が二等辺三角形であるための $\square$ 条件である。

(2) $\angle A<90°$ は，$\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための $\square$ 条件である。

(3) a, b のうち少なくとも 1 つが偶数であることは，ab が偶数であるための $\square$ 条件である。

(4) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつためには，$b^2-4ac>0$ であることが $\square$ 条件である。

227 次の等式が，x のすべての値に対してつねに成り立つように，定数 a, b, c を定めよ。

(1) $a(x-2)-b(x+2)=4x$

(2) $a(x-1)+b(x+1)-(5x-1)=0$

(3) $a(x+1)^2+b(x+1)+c=x^2+x+1$

(4) $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

(5) $\dfrac{x+8}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}$

標準問題

228 $x=by+cz$, $y=cz+ax$, $z=ax+by$ のとき，

(1) $(a+1)x=(b+1)y=(c+1)z$ が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$ を簡単にせよ。

229 (1) $a^2+2bc=b^2+2ca=c^2+2ab$ ならば，$a=b=c$ であることを証明せよ。

(2) $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ ならば，x, y, z のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを証明せよ。

230 a, b, c を 1 より小さい正の数とするとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $a+b-ab<1$

(2) $a+b+c-abc<2$

231 次の不等式を証明せよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1) $x^2+xz+z^2+3y(x+y+z)\geqq 0$

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$

(3) $6(a^2+2b^2+3c^2)\geqq(a+2b+3c)^2$

232 a，b，c を正の実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqq (1+abc)^3$$

（学習院大－法）

233 a，b，c が自然数のとき，次の命題が正しいことを証明せよ。

(1) $a^2+b^2=c^2$ が成り立てば，a，b，c のうち少なくとも1つは偶数である。

(2) $a^2+b^2=c^2$ が成り立てば，a，b のうち少なくとも1つは3の倍数である。

234 次の命題の逆・裏・対偶をつくり，その真偽を調べよ。

(1) x，y が自然数で，$x+y$ が奇数ならば，x，y のうち一方は奇数，他方は偶数である。

(2) $x=-1$ または $x=3$ ならば，$(x+1)(x-3)=0$ である。

(3) $2<x\leqq 4$ ならば，$x^2-6x+8\leqq 0$ である。

(4) $ax^2+bx+c\leqq 0$ $(a\neq 0)$ をみたす実数 x があるならば，$a<0$ または $b^2-4ac\geqq 0$ である。

235 次の $\boxed{\quad}$ にあてはまるのは，下の語群のうちのどれか。

(1) 長さ a，b，c の3つの線分が鋭角三角形をつくりうるためには，$|a^2-b^2|<c^2<ab$ は $\boxed{\quad}$ である。また，$|a^2-b^2|<c^2<(a+b)^2$ は $\boxed{\quad}$ である。

(2) $|x|\leqq 1$ かつ $|y|\leqq 2$ は，$2|x|+|y|\leqq 2$ であるための $\boxed{\quad}$ である。

(3) 任意の整数 x に対して ax^2+bx+c が2で割り切れるためには，a，b，c が偶数であることは $\boxed{\quad}$ である。ただし，a，b，c は整数である。

ア．必要条件　　イ．十分条件　　ウ．必要かつ十分な条件

エ．必要でも十分でもない条件

（早大－政経）

236 次の等式が，x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d，e の値を定めよ。

(1) $\dfrac{x^2-6x+3}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ （明治大－理工）

(2) $\dfrac{2x^2-6x-6}{x^3-5x^2+6x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}$ （北海道工大）

(3) $\dfrac{2x^4+x^3+2x^2-5x+3}{x^3-1}=ax+b+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$ （関西医大）

Back!　「セミナーノート」第14講座 53～56 ページ

Help!　「数学 α の完全整理」107～117 ページ