36 2次方程式

解答は「考え方と解答」119ページ

基本問題

660 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$　　(2) $a^2x^2-a^2x=ab+b^2$ $(a\neq 0)$

661 $x=3$ が次の方程式の解となるように実数 a の値を定め，次に他の解を求めよ。

(1) $x^2-ax+3=0$　　(2) $ax^2+3x+a(a+1)=0$

662 2次方程式 $kx^2-8x+(k+6)=0$ が次の条件をみたすように，定数 k の範囲を定めよ。

(1) 実数解をもつ　　(2) 異なる2つの実数解をもつ

(3) 虚数解をもつ

663 次の2次方程式の解を判別せよ。

(1) $x^2+kx+9=0$　　(2) $x^2+kx-k+8=0$

(3) $2x^2+(k-1)x+k-1=0$

664 2次方程式 $x^2-4x+7=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta$　　(2) $\alpha\beta$　　(3) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

(4) $(\alpha+1)(\beta+1)$　　(5) $\alpha^2+\beta^2$　　(6) $(\alpha-\beta)^2$

(7) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$　　(8) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

665 次の2数を解にもつような x の2次方程式をつくれ。ただし，x^2 の係数は1とする。

(1) 2，3　　(2) -3，2

(3) -7，-5　　(4) $\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$

(5) $1+i$，$1-i$　　(6) $3+\sqrt{2}$，$3-\sqrt{2}$

666 2次方程式 $x^2+px+q=0$ の解が $2+\sqrt{5}i$，$2-\sqrt{5}i$ であるとき，p，q の値を求めよ。

667 2次方程式 $2x^2-3x-6=0$ の2つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (2) $\alpha^2+\beta^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3$

(4) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ (5) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$ (6) $\dfrac{\alpha}{\alpha-2}+\dfrac{\beta}{\beta-2}$

668 次のような2数を求めよ。

(1) 和が 10，積が 21 (2) 和が -6，積が 9

(3) 和が 1，積が 1 (4) 和が 6，積が 13

669 解の公式を用いて，次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2-7x+5$ (2) $2x^2+15x-38$

(3) $3x^2+10x+8$ (4) $4x^2-4x-1$

670 2次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の解を α, β とするとき，次の2数を解にもつ整数係数の2次方程式をつくれ。

(1) 2α, 2β (2) $-\alpha$, $-\beta$

(3) $\alpha+1$, $\beta+1$ (4) α^2, β^2

(5) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$ (6) $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$

671 次の2つの2次方程式がともに実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x^2+(a+1)x+a^2=0,\quad x^2+2ax+2a=0$$

（日本歯大）

672 次の2つの x についての方程式が同じ解をもつための k の値をすべて求めよ。

$$x^2-(k-3)x+5k=0,\quad x^2+(k+2)x-5k=0$$

673 (1) $x^2+ax+b=0$ の1つの虚数解が $2+\sqrt{3}i$ となるように実数 a, b を求めると，$a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$ （大阪経大）

(2) 方程式 $(1+i)x^2-(2-i)x-3+4ai=0$ が実数解をもつように実数 a の値を定めよ。

標準問題

674 p, q が実数のとき，$q>0$ であることは，x についての2次方程式 $x^2+2px+q=0$ が虚数解をもつための $\boxed{}$ 条件である。 (四日市大)

675 a, b を実数とする。2次方程式 $x^2+2ax+b=kx+a$ は，すべての実数 k に対して実数解をもつ。このとき，a と b の関係は $\boxed{}$ となる。 (久留米大)

676 3つの2次方程式

$$x^2-2ax+4=0,\ x^2-2ax+3a+4=0,\ x^2-2ax+2a^2+2a-3=0$$

について，次の条件に適する実数 a の範囲を求めよ。

(1) 3つとも実数解をもつ。

(2) 1つだけ実数解をもつ。

677 2次方程式 $x^2-9x+a=0$ の2つの解の間に次の関係があるとき，定数 a の値を求めよ。

(1) 2つの解の比が 1：2

(2) 2つの解の差が 1

678 (1) 2次方程式 $x^2+kx+2=0$ の解が α, $\alpha+1$ $(\alpha>0)$ であるとき，定数 k の値と解 α を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2-12x-k=0$ の1つの解が他の解の3倍であるとき，定数 k の値と大きいほうの解を求めよ。

679 2次方程式 $(x-1)(x-2)+x(x-1)+x(x-2)=0$ の2つの解を α, β とするとき，

$\dfrac{4}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\dfrac{3}{(x-2)(\beta-2)}$ の値は $\boxed{}$ である。 (中京大)

680 方程式 $x^2+2x+4=0$ の2解を α, β とし，n を自然数とする。このとき

(1) $\alpha^4+\beta^4=\boxed{}$　(2) $\alpha^8+\beta^8=\boxed{}$　(3) $\alpha^{3n+2}+\beta^{3n+2}=\boxed{}$

(日本大-理工)

681 (1)　2次方程式 $x^2-px+1=0$ の2つの解を α, β とするとき，$\alpha^3+\beta^3=2$ であるという。実数 p と解 α, β を求めよ。

(城西大－理)

(2)　a を実数として，2次方程式 $x^2+ax+4=0$ の解を α, β とする。このとき，$\alpha+1$ と $\beta-1$ を解としてもつ2次方程式は $x^2+ax+a=0$ となる。a と α, β の値を求めよ。

682 (1)　2次方程式 $x^2-x-k=0$ の2つの解が $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta-\cos\theta$ である。このとき，$\sin\theta=$□，$k=$□ である。

(立教大－経済)

(2)　2次方程式 $x^2-ax+a=0$ の2つの解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ であるとき，a の値は□，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値は□である。

(名城大－理工)

683 2次方程式 $x^2-ax+a^2-4=0$ について，

(1)　2つの解がともに正であるための実数 a の範囲を求めよ。

(2)　1つの解だけが正であるための実数 a の範囲を求めよ。

(滋賀大)

684 2つの2次方程式 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$ がただ1つの共通解をもつとき，

(1)　この共通解を求めよ。

(2)　共通でない解の和を求めよ。

685 (1)　x についての2次方程式 $3x^2+(a^2-9)x+6a=0$ （a は実数の定数）が純虚数（pi の形の虚数，ただし p は0でない実数）の解をもつとき，a の値は□で，方程式の解は $x=$□である。

(神戸学院大－法)

(2)　方程式 $(1+pi)x^2+(1-i)x-6-2i=0$ の1つの解が実数であるように実数 p の値を定め，かつ，それに対する2つの解を求めよ。

(法政大－法)

686 方程式 $x^2+x+1=0$ の2つの解を α, β とする。n は整数である。

(1)　n が3の倍数のとき，$\alpha^n+\beta^n$ の値を求めよ。

(2)　n が3の倍数でないとき，$\alpha^n+\beta^n$ の値を求めよ。

(3)　n が3の倍数でないとき，α^n, β^n もこの方程式の2つの解であることを証明せよ。

Back! Help!　「セミナーノート」第36講座 141～144 ページ
「数学 α の完全整理」279～284 ページ

37 高次方程式

☞ 解答は「考え方と解答」123 ページ

基本問題

687 整数 $f(x)=x^3-2x^2-ax+6$ が次の条件をみたすように，定数 a の値を定めよ。

(1) $x-1$ で割ると 3 余る。

(2) $x+1$ および $x-2$ で割ると余りが等しい。

688 (1) 整数 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ を $x+1$ で割ると -1 余り，$x-2$ で割ると 5 余るという。定数 a，b の値を求めよ。

(2) 整式 $f(x)=3x^3+ax^2-14x+10$ を $x+2$ で割っても，$x-1$ で割っても余りが同じになる。a の値と余りを求めよ。

689 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^3-7x^2+2x+3$ (2) $3x^3-10x^2+9x-2$

(3) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ (4) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$

690 次の方程式を解け。

(1) $2x^3-9x^2-6x+5=0$ (2) $3x^3+4x=x^2-8$

(3) $x(x+2)(x+4)=1\cdot3\cdot5$ (4) $x^4+8x=0$

(5) $x^4+5x^3-20x-16=0$

691 (　) の部分を X とおくことにより，次の方程式を解け。

(1) $(x^2+1)^2-(x^2+1)=0$ (2) $(x^2-x)^2-3(x^2-x)+2=0$

(3) $(x^2-3x)^2-8(x^2-3x)-20=0$ (4) $(x^2-2x)^2-5x^2+10x+4=0$

692 $x^3-1=0$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，

(1) ω^2 も上の方程式の解であることを示せ。

(2) 次の式の値を求めよ。

(ア) $\omega^2+\omega$ (イ) $\omega^4-\omega+1$ (ウ) $\dfrac{\omega^2+1}{\omega}$ (札幌学院大)

693 3次方程式, $x^3-x^2-4x-6=0$ の3つの解を α, β, γ とするとき,

$$\alpha+\beta+\gamma=\square,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\square,\quad \alpha\beta\gamma=\square$$

である。したがって

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\square,\qquad (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=\square$$

である。 (九州国際大)

694 (1) 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+1=0$ が $1+\sqrt{2}$ を解にもつという。このとき,有理数 a, b の値,および,上の方程式の $1+\sqrt{2}$ 以外の解をすべて求めよ。 (城西大－理)

(2) a, b が実数で, 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-20=0$ の1つの解が $3-\sqrt{-1}$ であるとき, $a=\square$, $b=\square$ である。 (早大－商)

695 4次方程式 $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-ax+b=0$ が $2+i$ を解にもつような実数 a, b を求めたい。

$2+i$ を解にもつ実数係数の2次方程式で, x^2 の係数が1であるものは

$$g(x)=\square=0$$

$f(x)$ を $g(x)$ で割ると,商が $\square$, 余りが $\square$ であるから

$$f(x)=g(x)(\square)+\square$$

x に $2+i$ を代入して,実数部分と虚数部分に分けると

$$f(2+i)=\square+\square i=0 \quad したがって, a=\square,\ b=\square$$

(東海大－海洋)

標準問題

696 整式 $f(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが3, $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $x+2$ である。$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。 (関西大－社会)

697 整式 $f(x)$ を x^2-x-2 で割ると $3x-2$ 余り, x^2-3x+2 で割ると $x+2$ 余る。$f(x)$ を x^2-x-2 と x^2-3x+2 の最小公倍数で割ったときの余りを求めよ。 (徳島文理大－薬)

698 (1) 3次方程式 $2x^3-3x^2+ax+b=0$ の2つの解が $x=2$ と $x=3$ であるとき, $a=\square$, $b=\square$ であり,残りの1つの解は $x=\square$ である。 (東京工芸大)

(2) a を実数とする方程式 $x^3+(a+1)x^2+(a^2-7a-7)x+2(2a+1)=0$ は3個の実数解 1, α, β $(\alpha<\beta)$ をもつ。このとき, $a=\square$, $\alpha=\square$, $\beta=\square$ である。 (九州国際大)

(3) x の3次方程式 $x^3-(3k+2)x^2+k(3k+4)x=0$ が異なる3つの実数解をもつように,整数 k の値を定めよ。 (防衛大)

699 3次方程式 $x^3+(1+3i)x+(2+ki)=0$ （ただし，$i^2=-1$）が少なくとも1つの実数解をもつとき，実数 k の値は $\boxed{}$ であり，その実数解は $\boxed{}$ である。 （南山大－経済）

700 3次方程式 $f(x)=x^3+px+q=0$ が複素数 $a+i$ を解にもつという。ただし，p，q，a は実数で，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき，

(1) $f(x)=0$ の $a+i$ 以外の2つの解を a で表せ。

(2) $p=-2$ のとき，q と a を求めよ。 （城西大－薬）

701 3次方程式 $x^3-(2a+3)x^2+(5a+9)x-(3a+7)=0$ が二重解をもつように a の値を定めよ。また，そのおのおのの場合について，方程式の解を求めよ。 （早大－商）

702 次の3次方程式と2次不等式を同時にみたす整数 x が少なくとも1つあるような a の値の範囲を求めよ。

$$3x^3-(6a+7)x^2+(14a+2)x-4a=0,\quad x^2-2ax+a^2-1\leqq 0$$

（国士舘大－工）

703 方程式 $x^4-x^3+x^2+2=0$ の1つの解は $1+i$ であることを示せ。次に残りの解をすべて求めよ。 （京都産業大）

704 x の方程式 $x^4+ax^3+(a+4)x^2+(a^2-8)x+a^2-13=0$ がただ1つの実数解をもつように a の値を定めると，$a=\boxed{}$ で，また，このときの虚数解は $\boxed{}$ である。 （芝浦工大）

705 (1) x についての方程式 $x+\dfrac{1}{x}=t$ が相異なる2つの正の解をもつための実数 t の条件を求めよ。

(2) x についての4次方程式 $x^4-ax^3+(a+6)x^2-ax+1=0$ が相異なる4つの正の解をもつための実数 a の条件を求めよ。 （成城大－法）

Back! Help!

「セミナーノート」第37講座 145～148 ページ
「数学 α の完全整理」285～290 ページ