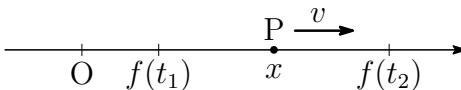


第 6 章 学習指導要領の範囲外の内容

6.1.1 道のり

速度と位置

数直線上を運動する点 P の座標や速度は、時刻 t の関数である。時刻 t における点 P の座標を $x = f(t)$ 、速度を v とすると、167 ページで学んだように、

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$


が成り立つ。

よって、点 P の $t = t_1$ から $t = t_2$ までの位置の変化量 $f(t_2) - f(t_1)$ は、

$$f(t_2) - f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

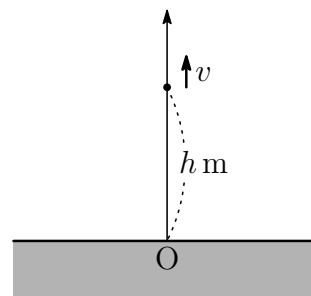
で表される。

したがって、時刻 $t = t_2$ における点 P の座標 x は、次のようになる。

$$x = f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

例 6.1 30m/秒の速さで地上から真上に打ち上げられた物体の t 秒後の速度 v m/秒は、 $v = 30 - 9.8t$ で与えられるという。ただし、 $0 \leq t \leq 6$ である。打ち上げられてから 2 秒後における物体の高さ h m は

$$\begin{aligned} h &= \int_0^2 (30 - 9.8t) dt = \left[30t - 4.9t^2 \right]_0^2 \\ &= 60 - 19.6 = 40.4 \text{ (m)} \end{aligned}$$



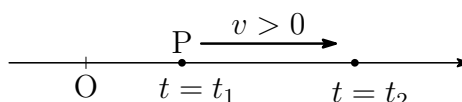
270 第6章 学習指導要領の範囲外の内容

道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とし, 時刻 t_1 から t_2 までに点 P が通過する道のりを s とする.

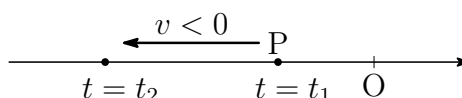
$t_1 \leq t \leq t_2$ において常に $v > 0$ ならば, 前ページで調べたことから

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$



である. また, $t_1 < t < t_2$ において常に $v < 0$ ならば

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (-v) dt$$



である.

したがって, 一般に, 道のり s は, v の正負に関係なく次の式で表される.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$$

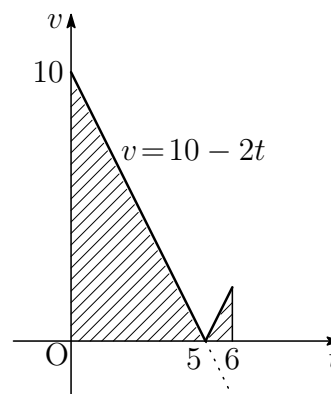
ここで, $|v|$ は点 P の速度の大きさ, すなわち速さを表している.

例 6.2 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が,

$$v = 10 - 2t \quad (0 \leq t \leq 6)$$

で与えられるとき, $t = 0$ から $t = 6$ までに点 P が通過する道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^6 |10 - 2t| dt \\ &= \left[10t - t^2 \right]_0^5 + \left[-10t + t^2 \right]_5^6 \\ &= (25 - 0) + \{-24 - (-25)\} = 26 \end{aligned}$$



[注意] 例 6.2 において, 点 P の道のり s は, 斜線部の面積に等しい.

座標平面上の運動における道のり

座標平面上を運動する点Pの道のりについて考えてみよう.

点Pの時刻 t における座標を

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

とする. いま, 時刻 t_1 から t までに点Pが通過する道のりを t の関数とみて, $s(t)$ で表す. また, t の増分 Δt に対する

$$s(t), \quad x = f(t), \quad y = g(t)$$

の増分を, それぞれ

$$\Delta s, \quad \Delta x, \quad \Delta y$$

とする.

$\Delta t > 0$ で Δt が十分小さいときは

$$\Delta s \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と考えられるから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

である. $\Delta t < 0$ のときも同様である.

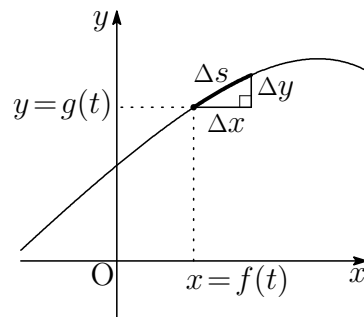
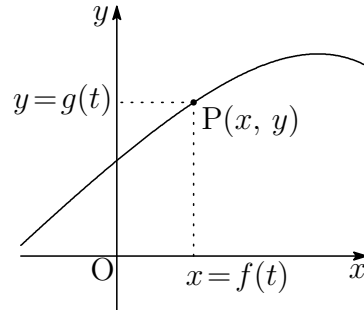
ここで, $\Delta t \rightarrow 0$ のときの極限を考えると, 次が成り立つ.

$$s'(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

169ページで学んだように, 時刻 t における点Pの速度ベクトル \vec{v} は $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ であり, 上の結果から, $s'(t) = |\vec{v}|$ が成り立つ.

以上のことから, 時刻 t_1 から t_2 までに点Pが通過する道のり s は, 次の式で表される.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt$$



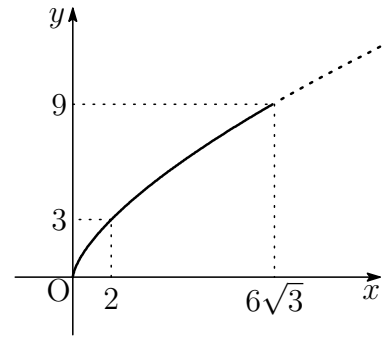
272 第6章 学習指導要領の範囲外の内容

例 6.3 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が

$$x = 2t^3, \quad y = 3t^2$$

で表されるとき, P が $t = 0$ から $t = \sqrt{3}$ までに通過する道のり s は

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 6t\sqrt{t^2 + 1} dt \end{aligned}$$



ここで, $t^2 + 1 = u$ とおくと, $2t dt = du$ と考えられるから

t	$0 \rightarrow \sqrt{3}$
u	$1 \rightarrow 4$

$$s = \int_1^4 3\sqrt{u} du = \left[2u\sqrt{u} \right]_1^4 = 14$$

練習 6.1 数直線上を運動する点 P があり, 時刻 t における P の速度は $v = \sin t + \sin 2t$ であるという. ただし, $t = 0$ のとき, P は原点にあるとする.

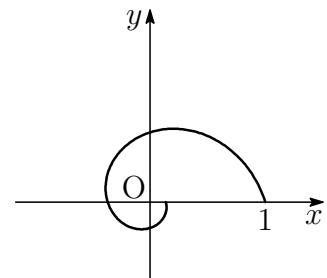
- (1) 時刻 t における P の座標を求めよ.
- (2) $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が通過する道のりを求めよ.

【答】 (1) $-\cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$

練習 6.2 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標が

$$x = e^{-t} \cos \pi t, \quad y = e^{-t} \sin \pi t$$

で表されるとき, $t = 0$ から $t = 2$ までに P が通過する道のりを求めよ.



【答】 $\sqrt{1 + \pi^2}(1 - e^{-2})$

6.1.2 曲線の長さ

媒介変数表示された曲線の長さ

座標平面上の曲線 C が、媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

で表されているとき、この曲線の長さ L を求めてみよう。

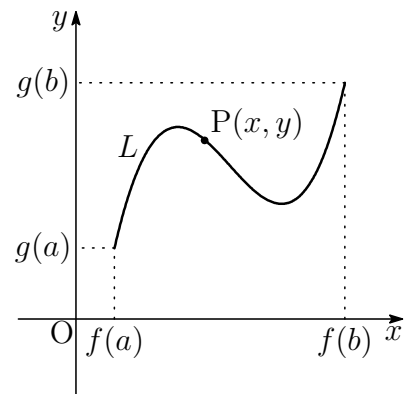
曲線 C 上の点 P の座標が、時刻 t の関数として

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

で表されると考えると、 P が時刻 a から b までに通過する道のりが、この曲線の長さ L になる。

したがって、 L は次の式で表される。

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$

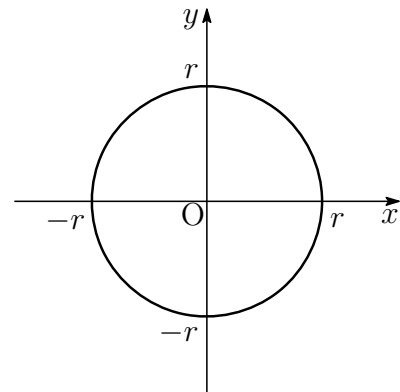


例 6.4 $r > 0$ とするとき、曲線

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

の長さ L を求めてみよう。

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt = r \left[t \right]_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$



例 6.4 によって、半径 r の円の周の長さが $2\pi r$ になることが示された。

274 第6章 学習指導要領の範囲外の内容

曲線 $y = f(x)$ の長さ

次の曲線の長さ L を考えてみよう.

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

この曲線は, 媒介変数 t を用いて

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表される.

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x)$$

であることから, この曲線の長さ L は, 次の式で表される.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

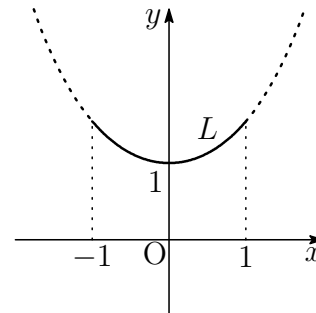
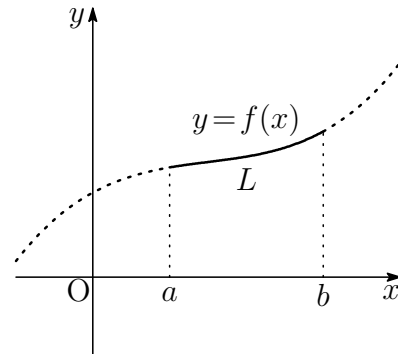
例 6.5 曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) の長さ L を求めてみよう.

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

よって

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 = e - \frac{1}{e}$$



練習 6.3 a を正の定数とする. 次のサイクロイドの長さを求めよ.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

【答】 $8a$

練習 6.4 a を正の定数とする. 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

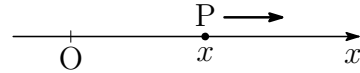
【答】 $\frac{3}{2}a$

6.1.3 微分方程式

微分方程式

点Pがx軸上を等速度aで運動する場合、時刻tにおけるPの座標をxとすると、xはtの関数であって、

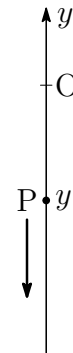
$$\frac{dx}{dt} = a \quad \dots \textcircled{1}$$



を満たす。

また、物体が地点Oから自由に落下する場合、鉛直上向きをy軸にとり、時刻tにおける物体の位置を座標yで表すと、yはtの関数であって、

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad \dots \textcircled{2}$$



を満たす。ただし、gは重力加速度の大きさである。

等式①、②のように、未知の関数の導関数を含む等式を微分方程式という。

微分方程式の解き方

a, gを定数とするとき、微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = a \quad \dots \textcircled{3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad \dots \textcircled{4}$$

を満たす関数yを、それぞれ求めてみよう。

③において、両辺をtで積分すると

$$y = at + C, \quad C \text{ は任意の定数} \quad \dots \textcircled{5}$$

④において、両辺をtで積分すると

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad C_1 \text{ は任意の定数}$$

さらに、両辺をtについて積分すると

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \text{ は任意の定数} \quad \dots \textcircled{6}$$

276 第6章 学習指導要領の範囲外の内容

前ページで調べたことから、微分方程式③, ④を満たす関数は、それぞれ⑤, ⑥であることがわかる。

一般に、微分方程式を満たす関数を、その微分方程式の解といい、すべての解を求めることを、その微分方程式を解くという。

微分方程式を解くと、いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる。その定数に特定の値を与えれば、解の1つが定まる。

例 6.6 k を定数とするとき、次の微分方程式を解いてみよう。

$$y' = ky$$

[1] 定数関数 $y = 0$ は明らかに解である。

[2] $y \neq 0$ のとき、方程式を変形すると

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = k$$

よって
$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int k dx$$

左辺に置換積分法の公式を適用すると

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dx$$

ゆえに $\log |y| = kx + C$, C は任意の定数

$$|y| = e^C e^{kx}$$

すなわち $y = \pm e^C e^{kx}$

ここで、 $\pm e^C = A$ とおくと、 A は0以外の任意の値をとる。

[1]における $y = 0$ は、 $y = Ae^{kx}$ において、 $A = 0$ とおくと得られる。

よって、求める解は $y = Ae^{kx}$, A は任意の定数

[終]

一般に、

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

の形に変形できる微分方程式の解は、次の等式から求めることができる。

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx$$

例 6.7 曲線 F 上の任意の点 $P(x, y)$ における接線が、原点 O と点 P を結ぶ直線に常に垂直であるという。この曲線が点 $(3, 4)$ を通るとき、この曲線 F の方程式を求めよう。

点 P における接線が直線 OP と垂直であるから、それらの傾きの積は、

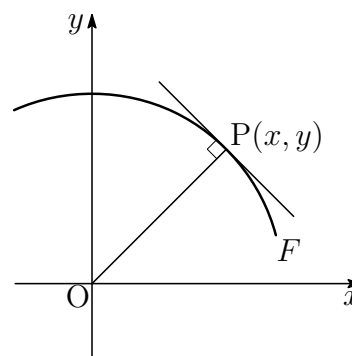
$$xy \neq 0 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$$

$$\text{すなわち } y \frac{dy}{dx} = -x$$

両辺を x で積分すると

$$\int y dy = \int (-x) dx$$

$$\text{よって } \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$



$$\text{ゆえに } x^2 + y^2 = 2C, C \text{ は任意の定数}$$

$$\text{この曲線が点 } (3, 4) \text{ を通るから } 3^2 + 4^2 = 2C$$

よって、 $x^2 + y^2 = 25$ で、 $xy = 0$ のときも条件を満たす。

したがって、曲線 F の方程式は $x^2 + y^2 = 25$ [終]

例 6.7 において、方程式 $x^2 + y^2 = 2C$ が曲線を表すためには、 $C > 0$ でなければならない。 $\sqrt{2C} = r$ とおくと、この方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ となり、曲線が原点を中心とする任意の半径の円であることがわかる。

練習 6.5 微分方程式 $y' = 2xy$ を解け。

【答】 $y = Ae^{x^2}$, A は任意の定数

練習 6.6 A を 0 でない任意の定数として、方程式 $xy = A$ の直角双曲線全体を考える。これらの直角双曲線のどれとも直交するような曲線の方程式を求めよ。ただし、2つの曲線が直交するとは、2つの曲線の交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わることである。

【答】 $x^2 - y^2 = C$, C は任意の定数